

От автора

Предлагаемое пособие представляет собой подробные поурочные планы по геометрии для 9 класса и ориентировано, прежде всего, на работу с учебным комплектом:

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия. 7–9 класс. – М.: Просвещение, 2000–2005.

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия: 9 кл. Рабочая тетрадь. – М.: Просвещение, 2002–2005.

Предлагаемые поурочные разработки в своей основе ориентированы на организацию работы класса по технологии дифференцированного обучения.

В данной книге учитель сможет найти подробные поурочные разработки, методические советы и рекомендации, тексты самостоятельных и контрольных работ в трех уровнях сложности, тестовые задания, дополнительные задачи для учащихся, задачи повышенной сложности, развивающие логическое мышление учащихся. Пособие будет полезно в первую очередь начинающему учителю, который сможет позаимствовать полностью предлагаемые сценарии уроков. Опытный учитель может использовать их частично, встраивая в собственный план урока.

Практически в каждом сценарии урока присутствуют задачи на готовых чертежах. Наличие уже готовых рисунков поможет учителю наиболее рационально использовать рабочее время на уроке.

Тестовые задания позволяют своевременно выявить затруднения учащихся и предупредить устойчивые пробелы в их знаниях, экономя при этом время учителя.

Дополнительные задачи предлагаются практически на каждом уроке. Их также можно использовать в качестве заданий на факультативных занятиях по предмету.

Контрольные и самостоятельные работы даны в трех уровнях сложности, что позволяет осуществить дифференцированный контроль. Большинство самостоятельных и контрольных работ сопровождаются ответами, указаниями или решениями для более эффективной организации работы над ошибками.

Все содержащиеся в данном пособии поурочные разработки являются примерными и рассчитаны в своем большинстве на классы с высоким уровнем математической подготовки. Количество предлагаемых на урок заданий явно избыточно. В зависимости от степени подготовленности и уровня как класса в целом, так и конкретных учащихся, учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в саму структуру, включая подбор заданий для классной, самостоятельной и домашней работы.

**ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
ПО ГЕОМЕТРИИ В 9 КЛАССЕ
(2 ч в неделю, всего 68 часов)**

Содержание материала	Кол-во часов
Вводное повторение	2
Векторы	12
§ 1 Понятие вектора	2
§ 2 Сложение и вычитание векторов	3
§ 3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	4
Решение задач	1
Контрольная работа № 1	1
Метод координат	10
§ 1 Координаты вектора	2
§ 2 Простейшие задачи в координатах	2
§ 3 Уравнения окружности и прямой	3
Решение задач	2
Контрольная работа № 2	1
Соотношения между сторонами и углами треугольника	14
§ 1 Синус, косинус и тангенс угла	3
§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника	6
§ 3 Скалярное произведение векторов	3
Решение задач	1
Контрольная работа № 3	1
Длина окружности и площадь круга	12
§ 1 Правильные многоугольники	4
§ 2 Длина окружности и площадь круга	5
Решение задач	2
Контрольная работа № 4	1
Движение	10
§ 1 Понятие движения	3
§ 2 Параллельный перенос	3
Решение задач	3
Контрольная работа № 5	1
Об аксиомах планиметрии	1
Повторение. Решение задач	6
Контрольная работа № 6 (итоговая)	1
Повторение	7

УРОКИ ВВОДНОГО ПОВТОРЕНИЯ

Основная цель этих уроков – повторение сведений, необходимых при изучении геометрии в 9 классе, а также совершенствование навыков решения задач на применение теоретических и практических ЗУН, приобретенных в процессе изучения геометрии в 7 и 8 классах. Целесообразно подробнее остановиться на повторении свойств треугольников и четырехугольников: теоремы Пифагора, свойств медиан, биссектрис, высот треугольника, средней линии треугольника и трапеции, формул для вычисления площадей треугольников и четырехугольников, свойств параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. Кроме перечисленного, при наличии времени, есть смысл повторения теории подобия треугольников, свойства отрезков хорд, касательных и секущих окружности, центральных и вписанных углов, вписанных и описанных окружностей.

Урок 1 Повторение

Цели урока:

- Повторение основного теоретического материала курса геометрии 8 класса.
- Закрепление решения простейших задач на использование теории курса геометрии 8 класса.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся. Теоретический тест

Задания теста учащиеся выполняют самостоятельно с использованием таблиц 4–7 (см. Приложение) с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, с которыми не справились большинство учащихся.

I

- Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:
1. Сумма углов выпуклого n -угольника равна ...

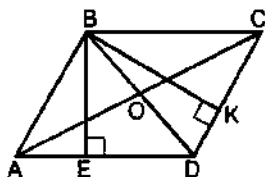


Рис 1

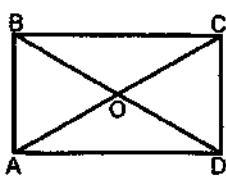


Рис 2

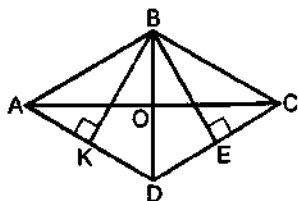


Рис 3

2. Рис. 1. Если $ABCD$ – параллелограмм, то:

- а) $AO = \dots$, $BO = \dots$; б) $\angle OAD = \angle \dots$;
 в) $AB = \dots$, $BC = \dots$; г) $S_{ABO} = \dots S_{ABCD}$;
 д) $S_{ABCD} = \dots \sin A$; е) $AD \cdot BE = \dots$

3. Рис. 2. Если $ABCD$ – прямоугольник, то:

- а) $AO = \dots BD$;
 б) $\angle A = \angle C = \dots$;
 в) $AC = \sqrt{\dots + CD^2}$;
 г) $S_{AOD} = \dots AB \cdot AD$.

4. Рис. 3. Если $ABCD$ – ромб, то:

- а) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \dots$;
 б) AO – биссектриса $\dots$;
 в) $AC \dots BD$;
 г) $BK \dots BE$.

5. Рис. 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$) BD – высота, тогда:

- а) $\dots = \sqrt{x \cdot y}$;
 б) $AB = \sqrt{x \cdot \dots}$;
 в) $BC = \sqrt{\dots \cdot (x + y)}$;
 г) $(x + y)^2 = \dots$;
 д) $\triangle ABD \sim \triangle \dots$;
 е) $\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \dots$

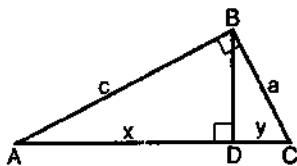


Рис 4

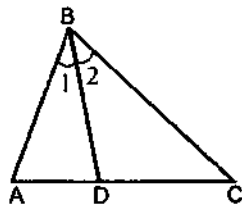


Рис 5

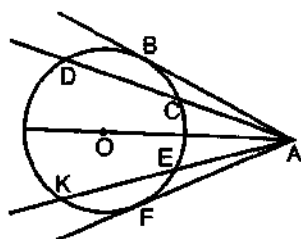


Рис 6

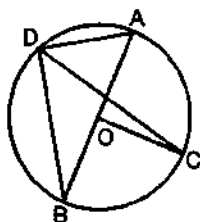


Рис 7

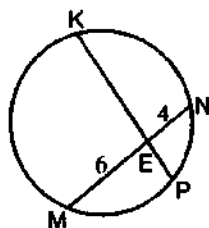


Рис 8

6. Рис. 5. В треугольнике ABC $\angle 1 = \angle 2$.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AD}{...}; \quad \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{...}.$$

7. Рис. 6.

а) $AB \dots AC$;

в) $AB^2 = \dots$;

б) $AC \cdot AD = \dots$;

г) $AO^2 = \dots$

8. Рис. 7.

а) $\angle ADB = \dots$;

б) $\angle AOC = \dots \angle ADC$;

в) $\angle CDB = \frac{1}{2} \angle \dots$;

г) $\angle DAB = \dots$

9. Если $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ и $\frac{AB}{MN} = k$, то $\frac{P_{ABC}}{P_{MNK}} = \dots$; $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \dots$

10. Если точка O – центр вписанной в треугольник окружности, то O – точка $\dots$

II

- Выберите верный ответ из предложенных.

11. Рис. 8. Если $KP = 11$ см, то:

а) $KE = EP = 5,5$ см;

б) $KE = 8$ см, $EP = 3$ см или $KE = 3$ см, $EP = 8$ см.

в) $KE = 6$ см, $EP = 5$ см.

12. Рис. 9. $\angle A$ равен:

а) 30° ;

б) 50° ;

в) 60° .

13. $\angle CKD$ (см. рис. 9):

а) 100° ;

б) 50° ;

в) 60° .

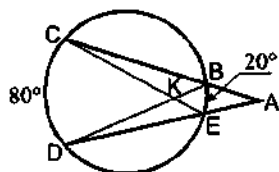


Рис 9

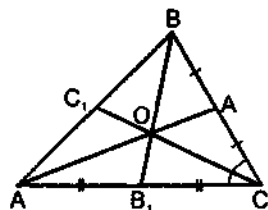


Рис 10

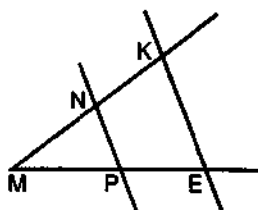


Рис 11

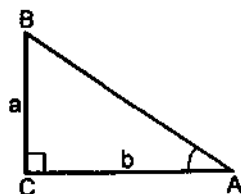


Рис 12

14. Рис. 10. В $\triangle ABC$ AA_1 и BB_1 – медианы.

а) $CO = 4$ см, $C_1O = 2$ см, если $BB_1 = 6$ см;

б) $\frac{CO}{CC_1} = \frac{1}{2}$;

в) $S_{AOC_1} = \frac{1}{6} S_{ABC}$.

15. Если O – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC , то:

а) O – центр описанной окружности;

б) O – центр вписанной окружности;

в) O – точка пересечения медиан, биссектрис и высот треугольника ABC .

16. Если O – центр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, то:

а) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;

б) $AB + CD = BC + AD$;

в) $ABCD$ – квадрат.

17. Рис. 11. Если $NP \parallel KE$, то:

а) $\frac{MN}{MP} = \frac{NP}{KE}$;

б) $\frac{NP}{KE} = \frac{NK}{PE}$;

в) $\frac{MN}{MP} = \frac{NK}{PE}$.

18. Рис. 12. Если $\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), то:

а) $\sin A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

б) $\cos A = \frac{b}{a}$;

в) $\operatorname{tg} A = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

19. Если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, то:

а) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$;

б) $\cos \alpha = \frac{8}{9}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$;

в) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

20. Квадрат – это:

а) прямоугольник, у которого все углы равны;

б) ромб, у которого диагонали равны;

в) параллелограмм, у которого все углы прямые.

Ответы к тесту

I

1. $180^\circ \cdot (n - 2)$.

2. а) $AO = OC$, $BO = OD$;

б) $\angle AOD = \angle OCB$;

в) $AB = CD$; $BC = AD$;

г) $S_{ABO} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$;

д) $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin A$;

е) $AD \cdot BE = CD \cdot BK$.

3. а) $AO = \frac{1}{2} \cdot BD$;

б) $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$;

в) $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$;

г) $S_{AOD} = \frac{1}{4} AC \cdot BD$.

4. а) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$;

б) AO – биссектриса $\angle BAD$;

в) $AC \perp BD$;

г) $BK = BE$.

5. а) $BD = \sqrt{x \cdot y}$,

б) $AB = \sqrt{x \cdot (x + y)}$;

в) $BC = \sqrt{y \cdot (x + y)}$;

г) $(x + y)^2 = a^2 + c^2$;

д) $\triangle ABD \sim \triangle BCD \sim \triangle ACB$;

е) $\frac{S_{ABO}}{S_{BDC}} = \frac{x}{y}$.

6. $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{CD}$; $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{BC}$.

7. а) $AB = AC$;

б) $AC \cdot AD = AE \cdot AK$;

$$\text{в) } AB^2 = AC \cdot AD \text{ (или } AE \cdot AK);$$

$$\text{г) } AO^2 = OB^2 + AB^2 \text{ (или } OC^2 + AC^2).$$

8. а) $\angle ADB = 90^\circ$;
 б) $\angle AOC = 2\angle ADC$;
 в) $\angle CDB = \frac{1}{2} \angle COB$;
 г) $\angle DAB = \frac{1}{2} \angle CDB$.

9. $\frac{P_{ABC}}{P_{MNK}} = K$; $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = K^2$.

10. O – точка пересечения биссектрис данного треугольника.

II

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Верный ответ	б	а	б	в	а	б	в	а	в	б

III. Решение задач на готовых чертежах

Задачи решить полуустно, промежуточные данные можно записать непосредственно на чертежах.

I уровень – решить задачи 1–9 с последующей проверкой и обсуждением решения некоторых из них по необходимости.

II уровень – решить самостоятельно задачи 7–15 с последующей самопроверкой по готовым ответам.

1. Рис. 13. $ABCD$ – квадрат.

Найти: P_{AMCK} , S_{AMCK} .

2. Рис. 14. $ABCD$ – прямоугольник.

Найти: P_{ABO} , S_{ABO} .

3. Рис. 15. $ABCD$ – прямоугольник, $AB = 8$, $BC = 4$.

$AK : AB = 3 : 8$; $CP : CD = 3 : 8$.

Найти: P_{DKBP} , S_{DKBP} .

4. Рис. 16. $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

Найти: S_{ABCD} .

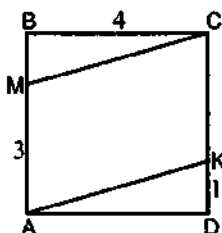


Рис. 13

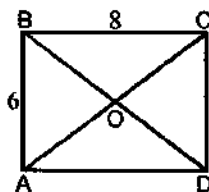


Рис. 14

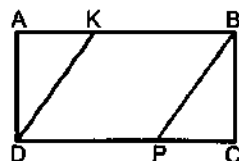


Рис. 15

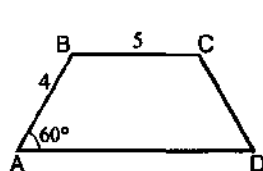


Рис 16

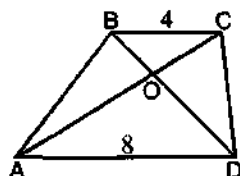


Рис 17

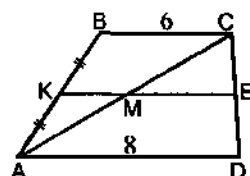


Рис 18

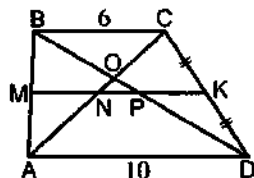


Рис 19

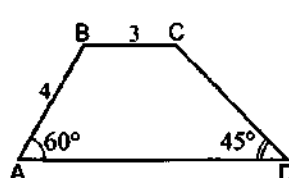


Рис 20

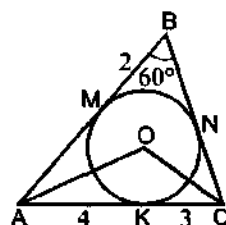


Рис 21

5. Рис. 17. $ABCD$ – трапеция.

Найти: $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}}$.

6. Рис. 18. $ABCD$ – трапеция. $KE \parallel BC$.

Найти: $|ME - KM|$.

7. Рис. 19. $ABCD$ – трапеция. $MK \parallel AD$, $AC = 12$.

Найти: NP , NO .

8. Рис. 20. $ABCD$ – трапеция.

Найти: P_{ABCD} , S_{ABCD} .

9. Рис. 21.

Найти: $\angle AOC$, P_{ABC} .

10. Рис. 22. $ABCD$ – трапеция.

Найти: S_{ABCD} .

11. Рис. 23. Найти: $\angle BEC$.

12. Рис. 24. $AC = 13$.

Найти: AM , MC .

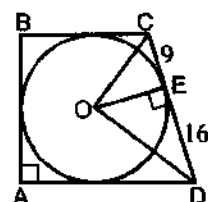


Рис 22

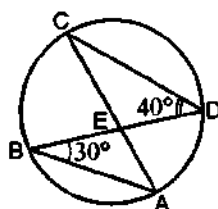


Рис 23

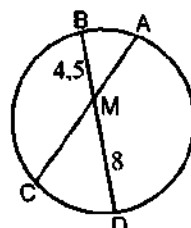


Рис 24

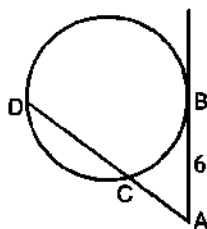


Рис 25

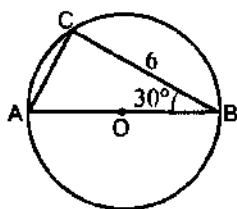


Рис 26

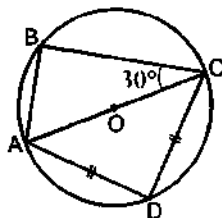


Рис 27

13. Рис. 25. $AC : CD = 4 : 5$

Найти: CD .

14. Рис. 26. Найти: $S_{\triangle ACO}$, $S_{\triangle BCO}$.

15. Рис. 27. Найти: $\angle BAD$, $\angle BCD$.

Ответы к задачам

1. $P = 16$, $S = 12$;

3. $P = 20$, $S = 20$;

5. $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOD} = 1/4$;

7. $NP = 2$; $NO = 1,5$;

9. $\angle AOC = 120^\circ$, $P_{\triangle ABC} = 18$;

11. $\angle BEC = 70^\circ$;

13. $CD = 5$;

15. $\angle BAD = 105^\circ$, $\angle BCD = 75^\circ$.

2. $P = 16$, $S = 12$;

4. $S = 14\sqrt{3}$;

6. $|ME - KM| = 1$;

8. $P = 12 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$, $S = 8\sqrt{3} + 6$;

10. $S = 588$;

12. 9 и 4;

14. $S_{\triangle ACO} = S_{\triangle BCO} = 3\sqrt{3}$;

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

I уровень: решить задачи № 10–15 на готовых чертежах.

II уровень: решить дополнительные задачи 1–4.

Дополнительные задачи

1. В $\triangle MNK$ со сторонами $MN = 5$ см, $NK = 8$ см, $MK = 9$ см вписана окружность, касающаяся стороны MK в точке E . Найдите расстояние от точки E до точки A биссектрисы NA ($A \in MK$). Найдите отношение радиуса описанной около треугольника окружности к радиусу вписанной окружности.

(Ответ: $EA = \frac{6}{13}$ см; $R : r = 5 : 3$.)

2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E . $\angle AEC = 154^\circ$, а дуга CB составляет 30% дуги AD . Найдите $\angle CB$ и $\angle AD$.

(Ответ: $\angle CB = 12^\circ$, $\angle AD = 40^\circ$.)

3. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

(Ответ: $4\frac{8}{13}$ см.)

4. Трапеция $ABCD$ (BC и AD – основания) вписана в окружность, $\angle A = 62^\circ$. Найдите дуги, на которые вершины трапеции делят окружность, если дуга AB равна 44° .
(Ответ: 44° , 80° , 44° , 192° .)

Урок 2

Повторение. Решение задач

Цель урока:

- Совершенствование навыков решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Проверить домашнее задание.

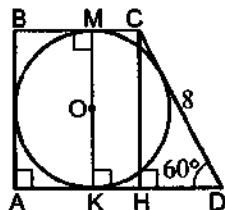
Разобрать решения задач:

1. В прямоугольной трапеции один из углов равен 60° , а большая боковая сторона равна 8 см. Найдите основания трапеции и радиус вписанной в нее окружности.

Решение (см. рис. 28):

- а) Проведем высоту CH , тогда $\triangle CDH$ – прямоугольный с углом C , равным 30° , поэтому катет HD равен половине гипотенузы CD , т. е. $HD = 4$ см.

$$\text{Значит, } CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \text{ (см) по теореме Пифагора.}$$



- б) Т. к. окружность вписана в трапецию, то $AB + CD = BC + AD$. $AB = CH = 4\sqrt{3}$ см, так как $ABCH$ – прямоугольник.

Рис. 28

$$AB + CD = 4\sqrt{3} + 8 \text{ (см)} \Rightarrow BC + AD = 4\sqrt{3} + 8 \text{ (см).}$$

$$AD = AH + HD = AH + 4 \text{ (см).}$$

$$BC = AH \Rightarrow BC + AD = 2 \cdot BC + 4 = 4\sqrt{3} + 8 \text{ (см)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3} + 2 \text{ (см), } AD = 2\sqrt{3} + 6 \text{ (см).}$$

- в) Проведем высоту трапеции через центр O окружности. Так как $MK \perp BC$ и $MK \perp AD$, то OM и OK – радиусы окружности, проведенные в точки касания M и K , тогда:

$$MO = \frac{1}{2}CH = 2\sqrt{3} \text{ (см), т. е. радиус вписанной окружности равен } 2\sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ: основания трапеции равны $2\sqrt{3} + 2$ (см) и $2\sqrt{3} + 6$ (см); радиус вписанной окружности $2\sqrt{3}$ см.

2. MN и MK – касательные к окружности с центром O (N и K – точки касания). Найдите градусную меру дуги NK , если $OM = 8$ м, а хорда NK делит отрезок OM точкой E в отношении $3 : 1$, считая от точки O .

Решение (см. рис. 29):

- а) Так как MN и MK – отрезки касательных, проведенных из точки M , то $MN = MK$, $\angle 1 = \angle 2$, тогда $\triangle NME = \triangle KME$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle MEN = \angle MEK$. Но $\angle MEN + \angle MEK = 180^\circ$, поэтому $OM \perp NK$.

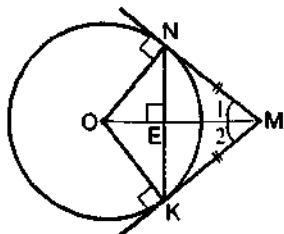


Рис 29

- б) $\triangle ONM \sim \triangle OEN$ по двум углам ($\angle ONM = \angle OEN = 90^\circ$, $\angle O$ – общий),

$$\text{следовательно, } \frac{ON}{OE} = \frac{OM}{ON} \Rightarrow ON = \sqrt{OE \cdot OM}.$$

$$OM = 8 \text{ см, } OE : EM = 3 : 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OE = \frac{3}{4} \cdot OM = 6 \text{ (см), } ON = \sqrt{6 \cdot 8} = 4\sqrt{3} \text{ (см).}$$

- в) В треугольнике ONE $\cos \angle NOE = \frac{OE}{ON} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle NOE = 30^\circ \Rightarrow \angle NOK = 60^\circ.$$

$$\angle ONK = \angle NOK = 60^\circ \text{ или } \angle ONK = 360^\circ - \angle NOK = 300^\circ.$$

Ответ: 60° или 300° .

III. Решение задач

Самостоятельно с последующей самопроверкой, используя ответы и указания, решить задачи:

I уровень – № 1–4;

II уровень – № 3–6.

Задача 1

Отрезок BD – диаметр окружности с центром O . Хорда AC делит пополам радиус OB и перпендикулярна к нему. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB , BC , CD , AD .

Решение (см. рис. 30):

- а) $\triangle OKC = \triangle OKA$ по гипотенузе и катету ($\angle OKC = \angle OKA = 90^\circ$, $OC = OA$ как радиусы, OK – общая) $\Rightarrow$ т. к. $OK = \frac{1}{2}CO =$

$$= \frac{1}{2}AO, \text{ то } \angle KCO = \angle KAO = 30^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle COK = \angle AOK = 60^\circ.$$

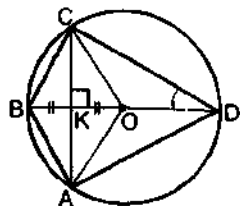


Рис 30

- б) $\triangle COB$ и $\triangle AOB$ – равнобедренные ($CO = OB = OA$ как радиусы). $\angle COB = \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \angle OCB = \angle CBO = \angle OBA = \angle OAB = 60^\circ$, тогда $\angle CBA = 120^\circ$.
- в) $\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$ как углы, опирающиеся на диаметр BD .
- г) Четырехугольник $ABCD$ – вписанный, тогда $\angle CBA + \angle CDA = 180^\circ \Rightarrow \angle CDA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
- д) $\sphericalangle AB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.
 $\sphericalangle BC = \frac{1}{2} \angle COB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.
 $\sphericalangle CD = \angle CBD = 60^\circ$. $\sphericalangle AD = \angle ADB = 60^\circ$.
- Ответ: $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$,
 $\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$,
 $\sphericalangle AB = \sphericalangle BC = 30^\circ$,
 $\sphericalangle CD = \sphericalangle AD = 60^\circ$.

Задача 2

Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, боковая сторона равна 17 см. Найдите радиусы вписанной в него и описанной около него окружности.

Решение (см. рис. 31):

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{289 - 64} = 15 \text{ (см)},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 120}{17+17+16} = \frac{24}{15} = 4,8 \text{ (см)},$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 120} = \frac{289}{30} = 9\frac{19}{30} \text{ (см)},$$

где a, b, c – стороны треугольника.

Ответ: 4,8 см; $9\frac{19}{30}$ см.

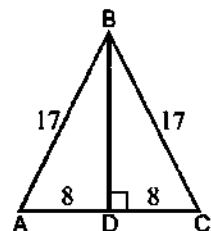


Рис 31

Задача 3

Диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, равна 10 см, а его площадь 48 см². Найдите радиус описанной окружности и стороны прямоугольника.

Решение (см. рис. 32):

- а) Так как AC – диагональ прямоугольника, $\angle ABC$ – прямой, то AC – диаметр окружности, тогда радиус данной окружности равен половине AC , т. е. $AO = 5$ см.

б) $S_{ABCD} = 48 \text{ см}^2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$

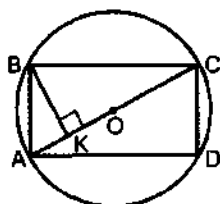


Рис 32

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK \Rightarrow BK = S_{\triangle ABC} : \left(\frac{1}{2} AC \right) = 4,8 \text{ (см)}.$$

в) В $\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$, $BK \perp AC \Rightarrow BK = \sqrt{AK \cdot KC}$.

Так как $AC = AK + KC = 10 \text{ см} \Rightarrow AK = 10 - KC \Rightarrow$

$$\Rightarrow BK = \sqrt{(10 - KC) \cdot KC} \Rightarrow (10 - KC) \cdot KC = 4,8^2,$$

$$KC^2 - 10 \cdot KC + 23,04 = 0.$$

$$D = 102 - 4 \cdot 1 \cdot 23,04 = 7,84 \Rightarrow KC = 3,6 \text{ см или } KC = 6,4 \text{ см},$$

$$\text{тогда } BC = \sqrt{BK^2 - KC^2} = 6 \text{ (см)}, \quad AB = \frac{S_{\triangle ABC}}{BC} = 8 \text{ см или}$$

$$BC = 8 \text{ см}, AB = 6 \text{ см}.$$

Ответ: стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см, радиус описанной окружности – 5 см.

Задача 4

Площадь четырехугольника $MNKP$, описанного около окружности радиуса 7 см, равна 182 см^2 . Найдите стороны четырехугольника, если известно, что PK на 6 см больше MN , $NK : MP = 7 : 6$.

Решение (см. рис. 33):

$$S_{MNKP} = \frac{1}{2} P_{MNKP} \cdot r \Rightarrow$$

$$P_{MNKP} = \frac{2 \cdot 182}{7} = 52 \text{ (см)}.$$

Четырехугольник $MNKP$ описанный, значит $MN + PK = NK + MP = 26 \text{ см}$.

По условию PK на 6 см больше MN , т. е. $MN + MN + 6 = 26 \Rightarrow$

$$\Rightarrow MN = 10 \text{ см}, PK = 16 \text{ см}.$$

$$NK : MP = 7 : 6 \Rightarrow NK = \frac{7}{6} MP \Rightarrow \frac{7}{6} MP + MP = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MP = 12 \text{ см}, NK = 14 \text{ см}.$$

Ответ: $MN = 10 \text{ см}, PK = 16 \text{ см}, MP = 12 \text{ см}, NK = 14 \text{ см}$.

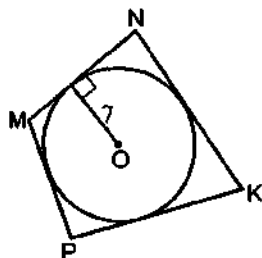


Рис 33

Задача 5

В трапеции $ABCD$ диагонали равны, основания BC и AD равны 7 см и 9 см соответственно, а расстояние между ними 8 см. Точки M, N, K, P – середины сторон трапеции. Найдите площадь четырехугольника $MNKP$.

Решение (см. рис. 34):

Если в трапеции диагонали AC и BD равны, то $MN = NK = KP =$

$$= MP, \text{ так как } MN = \frac{1}{2} AC, PK = \frac{1}{2} AC,$$

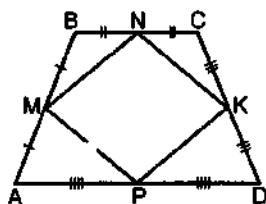


Рис 34

$NK = \frac{1}{2} BD$, $MP = \frac{1}{2} BD$ как средние линии треугольников ABC , ACD , BCD и ABD соответственно, а также $MN \parallel PK \parallel AC$, $MP \parallel NK \parallel BD \Rightarrow MNKP$ – ромб.

$S_{MNKP} = \frac{1}{2} MK \cdot NP$, MK – средняя линия трапеции $\Rightarrow$

$$\Rightarrow MK = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(7 + 9) = 8 \text{ см}, MK \parallel BC \parallel AD.$$

Диагонали ромба перпендикулярны, т. е. $MK \perp NP \Rightarrow$ так как $MK \parallel BC \parallel AD$, то $NP \perp BC$, $NP \perp AD$, т. е. NP – расстояние между прямыми BC и $AD \Rightarrow NP = 8$ см.

$$S_{MNKP} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 32 см^2 .

Задача 6

В треугольнике MNK $MK = NK$, $\cos N = \frac{1}{3}$. Найдите отношение высот MH и KE треугольника MNK .

Решение (см. рис. 35):

$MK = NK \Rightarrow \triangle MNK$ – равнобедренный.

$\cos N = \frac{1}{3}$, тогда в прямоугольном тре-

угольнике KEN $\cos N = \frac{NE}{KN} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow KN = 3 \cdot NE.$$

Так как высота KE является медианой треугольника MNK , то $MN = 2 \cdot NE$.

$\triangle NKE \sim \triangle NMH$ по двум углам ($\angle N$ – общий, $\angle KEN = \angle MHN = 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{NK}{NM} = \frac{KE}{MH} \Rightarrow \frac{KE}{MH} = \frac{3NE}{2NE} = \frac{3}{2}$, т. е. $MH : KE = 2 : 3$.

Ответ: $MH : KE = 2 : 3$.

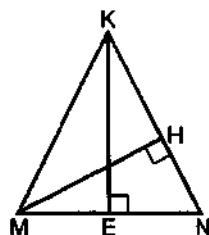


Рис. 35

IV. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

Решить задачи.

1. Радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, относятся как $2 : 3$. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и равна 20 см. Найдите радиусы окружностей.

(Ответ: $6\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см.)

2. Стороны треугольника равны 15 см, 18 м и b см. Какие значения может принимать b ? При каком значении b треугольник является прямоугольным?

(Ответ: $3 < b < 33$; $b = 3\sqrt{11}$ см.)

3. В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 17 см и 15 см, а меньшее основание в два раза меньше большего основания. Найдите площадь трапеции.

(Ответ: 180 см^2 .)

4. Круг радиуса 5 см касается трех сторон прямоугольника, одна из сторон которого равна 17 см. Найдите сумму расстояний от центра круга до вершин этого прямоугольника.

(Ответ: $26 + 10\sqrt{2}$ (см).)

ВЕКТОРЫ

Основная цель этой главы – сформировать понятие вектора как направленного отрезка, показать учащимся применение вектора к решению простейших задач.

Понятие вектора и действия над векторами вводятся так, как это принято в физике, а именно, «величины, характеризующиеся не только числовым значением, но и направлением». Геометрический вектор – это направленный отрезок.

При изучении данной темы необходимо акцентировать внимание на выполнении операций над векторами и использованию векторов при решении задач. Для более глубокого понимания векторов и операций над ними полезно воспользоваться знаниями учащихся о векторных величинах, полученных на уроках физики.

Урок 3 Понятие вектора

Цели урока:

- Ввести понятия вектора, его начала и конца, нулевого вектора, длины вектора, коллинеарных, сонаправленных, противоположно направленных, равных векторов.
- Научить учащихся изображать и обозначать векторы.

Ход урока

I. Организационный момент

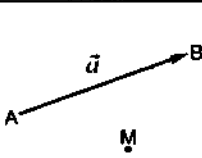
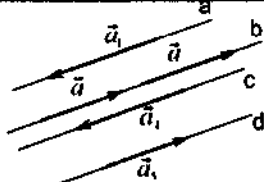
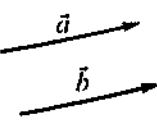
II. Проверка домашнего задания

Разобрать решения задач, с которыми не справилось большинство учащихся.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие вектора (направленного отрезка).
2. Изображение и обозначение вектора.
3. Ввести понятие нулевого вектора.
4. Ввести понятие длины вектора.
5. Коллинеарные векторы: сонаправленные и противоположно направленные.
6. Ввести понятие равных векторов.

В ходе изучения темы можно использовать таблицу или слайд:

 $\vec{a}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MM}$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = AB$ $\overrightarrow{MM} = 0$	 $a \parallel b \parallel c \parallel d$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ – коллинеарные векторы. $\vec{a}_1 \uparrow \vec{a}_4$ – сонаправленные векторы. $\vec{a}_1 \updownarrow \vec{a}_2$ – противоположно направленные векторы	 $\vec{a} = \vec{b}$, если: 1) $\vec{a} = \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$
--	---	--

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить устно задачу № 112 (с. 53, из рабочей тетради для 8 класса).

Задача № 112

Ответы: а) $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA}$;

в) вектор с началом и концом в точке С называется нулевым и обозначается $\overrightarrow{CC}$ или $\vec{0}$;

г) $|\overrightarrow{BC}| = 4, |\overrightarrow{BD}| = 4$;

д) вектору $\overrightarrow{BA}$ коллинеарен вектор $\overrightarrow{CD}$;

е) сонаправлены ненулевые векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$, противоположно направлены векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$;

ж) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, так как $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{BA} \uparrow \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DA}$, т. к. $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ не сонаправлены; $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{BD}$, т. к. $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$ не сонаправлены; $\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{AC}$, т. к. $|\overrightarrow{AO}| \neq |\overrightarrow{AC}|$; $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, т. к. $\overrightarrow{AO} \uparrow \overrightarrow{OC}$ и $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$;

з) $\overrightarrow{BA}$.

2. Решить устно задачу № 744.

3. Решить самостоятельно с последующим обсуждением задачи № 740, 745. (Нескольким учащимся можно предложить решить эти задачи на переносных досках, а затем проверить их решение.)

4. Решить самостоятельно задачи № 738, 742 (учитель при необходимости оказывает индивидуальную помощь).

Дополнительная задача

В четырехугольнике $ABCD$ $\overline{AB} = \overline{DC}$, O – точка пересечения диагоналей. Прямая m проходит через точку O и пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно. Среди векторов $\overline{BM}$, $\overline{MC}$, $\overline{AN}$, $\overline{DN}$, $\overline{AM}$, $\overline{NC}$ найдите:

- а) коллинеарные векторы;
- б) сонаправленные векторы;
- в) противоположные векторы;
- г) равные векторы;
- д) векторы, имеющие равные длины.

Ответы:

- а) $\overline{BM}$, $\overline{MC}$, $\overline{AN}$, $\overline{DN}$; $\overline{AM}$ и $\overline{NC}$;
- б) $\overline{BM} \uparrow \overline{MC} \uparrow \overline{AN}$; $\overline{AM} \uparrow \overline{NC}$;
- в) $\overline{DN} \uparrow \overline{MC}$; $\overline{DN} \uparrow \overline{AN}$; $\overline{DN} \uparrow \overline{BM}$;
- г) $\overline{MC} = \overline{AN}$; $\overline{AM} = \overline{NC}$;
- д) $|\overline{BM}| = |\overline{DN}|$; $|\overline{MC}| = |\overline{AN}|$; $|\overline{AM}| = |\overline{NC}|$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пл. 76, 77; вопросы 1–5.

Решить задачи № 739, 741, 746, 747, дополнительную задачу.

Дополнительная задача

В четырехугольнике $ABCD$ $\overline{AB} \uparrow \overline{CD}$, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$. K – середина CD , AK пересекает прямую BC в точке M . Среди векторов $\overline{AK}$, $\overline{KM}$, $\overline{MC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CK}$, $\overline{AB}$ укажите:

- а) коллинеарные векторы;
- б) сонаправленные векторы;
- в) противоположно направленные векторы;
- г) противоположно направленные векторы;
- г) равные векторы;
- д) векторы, имеющие равные длины.

Ответы:

- а) $\overline{AK}$ и $\overline{KM}$; $\overline{AD}$ и $\overline{MC}$; $\overline{AB}$ и $\overline{CK}$;
- б) $\overline{AK} \uparrow \overline{KM}$; в) $\overline{AB} \uparrow \overline{CK}$; $\overline{AD} \uparrow \overline{MC}$;
- г) $\overline{AK} = \overline{KM}$; д) $|\overline{AK}| = |\overline{KM}|$, $|\overline{AD}| = |\overline{MC}|$.

Урок 4

Откладывание вектора от данной точки

Цель урока:

- Научить учащихся откладывать вектор, равный данному.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Проверить решение домашних задач № 746, 474.

III. Актуализация знаний учащихся

Фронтальная работа

Работа проводится с целью повторения теоретического материала предыдущего урока.

$ABCD$ – параллелограмм (рис. 36).

$MNPQ$ – трапеция (рис. 37).

- Назовите все векторы, изображенные на рисунке.
- Среди изображенных на рисунке векторов укажите:
 - а) коллинеарные;
 - б) сонаправленные;
 - в) противоположно направленные;
 - г) равные;
 - д) равные по модулю;
 - е) векторы, сонаправленные вектору $\overrightarrow{OO}$.

Индивидуальная работа по карточкам

I уровень (карточка № 1)

Рис. 38. $PKEF$ – параллелограмм. A и B – середины KE и PF соответственно.

1. Запишите все векторы, изображенные на рисунке.
2. $\overrightarrow{PK} \uparrow \overrightarrow{FE}$. Почему?
3. $\overrightarrow{AE} \neq \overrightarrow{BF}$. Почему?
4. Равны ли векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{EB}$?
5. Равны ли векторы $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{AP}$ по абсолютной величине?

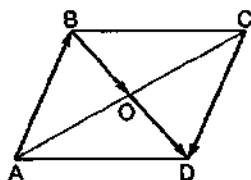


Рис. 36

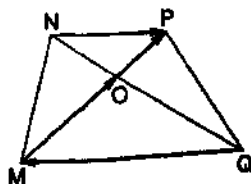


Рис. 37

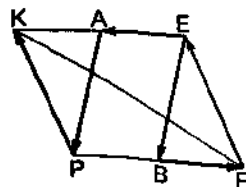


Рис. 38

II уровень (карточка № 2)

Рис. 39. $ABCD$ – квадрат, $AB = 4$.

Заполните пропуски:

- $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ – ...
- $\overrightarrow{BC}$... $\overrightarrow{CD}$, так как ...
- $|\overrightarrow{AO}| = \dots$
- $\overrightarrow{BO} \neq \overrightarrow{AO}$, так как ...
- $\overrightarrow{CO} \neq \overrightarrow{CA}$, так как ...
- $\overrightarrow{DD} \uparrow \dots$, $|\overrightarrow{DD}| = \dots$
- Абсолютная величина вектора $\overrightarrow{BD}$ равна ...

III уровень (карточка № 3)

Рис. 40. $AB = BC = 17$, $AC = 16$. M , N , K – середины сторон AB , BC , AC соответственно.

- Укажите векторы, равные вектору $\overrightarrow{MK}$.
- Укажите векторы, равные 8 по абсолютной величине.
- Укажите векторы, равные 8,5 по длине и неколлинеарные вектору $\overrightarrow{NK}$.
- Найдите $|\overrightarrow{BK}|$.
- Докажите, что не равны векторы:
 - $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{NK}$;
 - $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CK}$;
 - $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{KN}$.

IV. Изучение нового материала

- Показать, как отложить вектор $\vec{a}$ от точки A .
- Доказать, что от любой точки плоскости можно отложить вектор, равный данному.
- Выполнение практического задания № 743 учебника.

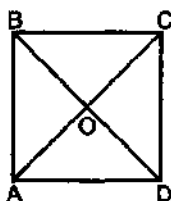


Рис. 39

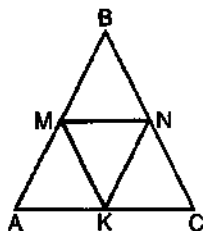


Рис. 40

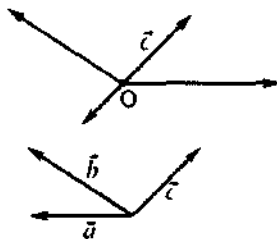


Рис. 41

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить самостоятельно задачи № 113, 114 (с. 54 рабочей тетради за 8 класс).

Учитель по необходимости оказывает индивидуальную помощь.

Задача № 113

Рис. 41.

1. Постройте ненулевой вектор с началом в точке O :
 - а) коллинеарный вектору $\vec{a}$;
 - б) сонаправленный с вектором $\vec{b}$;
 - в) противоположно направленный вектору $\vec{c}$.
2. Отложите от точки O вектор, равный вектору $\vec{c}$.
3. Сколько векторов, равных вектору $\vec{c}$, можно отложить от точки O ? (От точки O можно отложить только один вектор, равный вектору $\vec{c}$.)

Задача № 114

Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 дм и 4 дм. Найдите длину вектора $\vec{AC}$.

Решение: Длина вектора $\vec{AC}$ – это длина отрезка AC . Отрезок AC является диагональю прямоугольника $ABCD$, следовательно,

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (дм)}, \text{ т. е. } |\vec{AC}| = 5 \text{ дм.}$$

Ответ: $|\vec{AC}| = 5$ дм.

2. Разобрать решение задачи № 750.

3. Решить задачу № 751 самостоятельно с последующим обсуждением.

Задача № 750

Решение (см. рис. 42):

а) Т. к. $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$ и $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$,

т. е. $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, тогда четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

В параллелограмме диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, поэтому O – середина BC и AD одновременно, т. е. середины BC и AD совпадают.

б) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, так как середины BC и AD совпадают, поэтому $ABCD$ – параллелограмм, а значит $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, т. е. $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$ и $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$, следовательно, $\vec{AB} = \vec{CD}$.

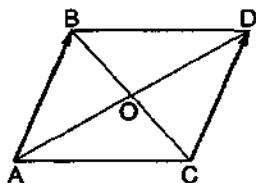


Рис 42

Задача № 751

Решение:

а) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, т. е. $AB \parallel DC$
 $AB = DC$, следовательно $ABCD$ – параллелограмм.

Если $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$, то в параллелограмме смежные стороны AB и BC равны, поэтому $ABCD$ – ромб.

б) $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{DC}$ значит $AB \parallel DC$. $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ не коллинеарны, значит, AD и BC не параллельны. Четырехугольник, в котором две стороны параллельны, называется трапецией, т. е. $ABCD$ – трапеция.

Ответ: а) ромб; б) трапеция.

VI. Самостоятельная работа обучающего характера

I уровень

I вариант

1. Рис. 43. От точки A отложите вектор:

- а) равный $\vec{a}$;
- б) сонаправленный $\vec{b}$;
- в) противоположно направленный $\vec{c}$.

2. $ABCD$ – ромб. Равны ли векторы:

- а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$;
- б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$;
- в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$?

II вариант

1. Рис. 44. От точки B отложите вектор:

- а) равный $\vec{b}$;
- б) сонаправленный $\vec{c}$;
- в) противоположно направленный $\vec{a}$.

2. $ABCD$ – квадрат. Равны ли векторы:

- а) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$;

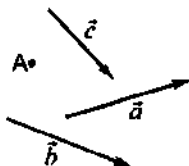


Рис 43

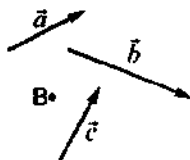


Рис 44

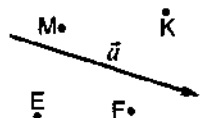


Рис 45

- б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
 в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$?

II уровень

I вариант

- Рис. 45. От точек M, E, F и K отложите векторы:
 - $\overrightarrow{KP} = \vec{a}$;
 - $\overrightarrow{FN} \uparrow \vec{a}$, $|\overrightarrow{FN}| \neq |\vec{a}|$;
 - $\overrightarrow{ES} \uparrow \vec{a}$, $|\overrightarrow{ES}| = |\vec{a}|$;
 - $\overrightarrow{MQ}$ не коллинеарный $\vec{a}$.
- Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и точкой O делятся пополам. Равны ли векторы:
 - $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CO}$;
 - $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OD}$;
 - $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;
 - $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?

II вариант

- Рис. 46. От точек A, B, C и D отложите векторы:
 - $\overrightarrow{AM} \uparrow \vec{b}$, $|\overrightarrow{AM}| \neq |\vec{b}|$;
 - $\overrightarrow{BN} \uparrow \vec{b}$, $|\overrightarrow{BN}| = |\vec{b}|$;
 - $\overrightarrow{CQ}$ не коллинеарный $\vec{b}$;
 - $\overrightarrow{DE} = \vec{b}$.
- Диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и точкой O делятся пополам. Равны ли векторы:
 - $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$;
 - $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{DO}$;
 - $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$;
 - $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$?

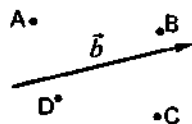


Рис. 46

III уровень

I вариант

- В ромбе $ABCD$ $|\overrightarrow{AC}| = 12$, $|\overrightarrow{BD}| = 16$. От вершин A и B отложены векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$, равные $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно. Найдите длину вектора $\overrightarrow{KE}$.
- Точка M лежит внутри треугольника ABC . От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MD}$, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ соответственно. Докажите, что $MFED$ – параллелограмм.

II вариант

1. В ромбе $ABCD$ $|\overrightarrow{AC}| = 6$, $|\overrightarrow{BD}| = 8$. От вершин C и D отложены векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{DN}$, равные $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MN}$.
2. Точка Q лежит внутри треугольника MNK . От этой точки отложены векторы $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$, равные векторам $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{NK}$ соответственно. Докажите, что $QABC$ – параллелограмм.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень**I вариант**

2. а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$.

II вариант

2. а) $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DA} \neq \overrightarrow{DC}$.

II уровень**I вариант**

2. $ABCD$ – параллелограмм, поэтому:

- а) $\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{CO}$; б) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$; г) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

II вариант

2. $ABCD$ – прямоугольник, поэтому:

- а) $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$; г) $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AD}$.

III уровень**I вариант**

1. Рис. 47

$\triangle EAC$ – прямоугольный, $AC = 12$, $AE = 16 \Rightarrow EC = 20$.

$\triangle DBK$ – прямоугольный, $BK = 12$, $BD = 16 \Rightarrow KD = 20$.

В $\triangle DOC$ $DC = \sqrt{OD^2 + OC^2} = 10 \Rightarrow EK = 30 \Rightarrow |\overrightarrow{KE}| = 30$.

Ответ: $|\overrightarrow{KE}| = 30$.

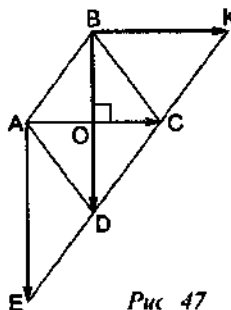


Рис 47

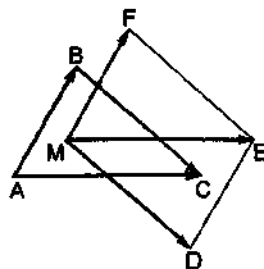
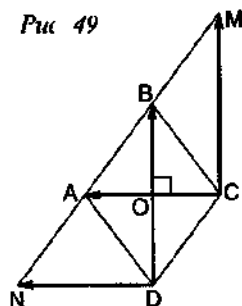


Рис 48

Рис 49



2. Рис. 48

$ABFM$ – параллелограмм, $AMCE$ – параллелограмм $\Rightarrow BF = CE$ и $BF \parallel CE \Rightarrow BFEC$ – параллелограмм, но $MBCD$ – тоже параллелограмм $\Rightarrow MD = FE$, $MD \parallel FE \Rightarrow MFED$ – параллелограмм.

II вариант

1. Рис. 49

$\triangle ACM$ – прямоугольный, $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = 10$.

$\triangle DBN$ – прямоугольный, $NB = \sqrt{DN^2 + DB^2} = 10$.

$\triangle ABO$ – прямоугольный, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow MN = 15 \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = 15$.

Ответ: $|\overrightarrow{MN}| = 15$.

2. Рис. 50

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QA} \Rightarrow MNAQ$ – параллелограмм.

$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{QB} \Rightarrow MQBK$ – параллелограмм,

т. е. $NA = MQ = KB$ и $NA \parallel MQ \parallel KB \Rightarrow NABK$ – параллелограмм.

$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{NK} \Rightarrow QC \parallel NK \parallel AB$, $QC = NK = AB \Rightarrow QABC$ – параллелограмм.

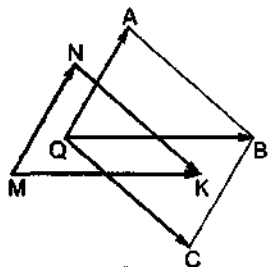


Рис 50

VII. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Пп. 76–78; вопросы 1–6.

Решить задачи № 748, 749, 752.

Дополнительная задача

Диаметр AC и хорда AB образуют угол в 30° , а радиус окружности равен 7 см. Внутри данной окружности выбрана точка K и от нее отложены векторы $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{KP}$, равные $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно. Найдите длину вектора $\overrightarrow{PE}$.

(Ответ: $|\overrightarrow{PE}| = 7$ см.)

Урок 5**Сумма двух векторов****Цели урока:**

- Ввести понятия суммы двух векторов на примере правила треугольника.
- Рассмотреть законы сложения векторов и правило параллелограмма.

- Научить учащихся строить сумму двух данных векторов, используя правила треугольника и параллелограмма.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Анализ ошибок самостоятельной работы

Разобрать задачи, с которыми не справились большинство учащихся.

Задание на дом: провести работу над ошибками (ответы и указания к задачам самостоятельной работы вывесить в кабинете на рабочем стенде).

III. Проверка домашнего задания

Проверить домашнюю задачу № 752 (устно) и дополнительную задачу (решение один из учащихся готовит на доске).

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие суммы двух векторов (правило треугольника).
2. Законы сложения векторов:
 - а) Переместительный закон: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
 - б) Сочетательный закон $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. Сложение векторов по правилу параллелограмма.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить устно задачу № 115, самостоятельно № 116 (рабочая тетрадь для 8 класса) с последующим обсуждением.

Задача № 115

Используя правило треугольника, найдите сумму векторов:

- | | |
|--|--|
| а) $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MT}$; | б) $\overrightarrow{CH}$ и $\overrightarrow{HC}$; |
| в) $\overrightarrow{AB} + \vec{0}$; | г) $\vec{0} + \overrightarrow{CE}$. |

Решение:

- | |
|--|
| а) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{PT}$; |
| б) $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$; |
| в) $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$; |
| г) $\vec{0} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CE}$. |

Ответ: а) $\overrightarrow{PT}$; б) $\vec{0}$; в) $\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{CE}$.

Задача № 116

Используя правило треугольника, постройте векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$. Определите вид четырехугольника $OABC$.

Решение (см. рис. 51): Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ и от точки M – вектор $\overrightarrow{MA} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$.

Аналогично строим $\overrightarrow{CK} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{KB} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB}$. Т. к. $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$, следовательно, $OA \parallel CB$ и $OA = CB$, поэтому четырехугольник $OACB$ – параллелограмм.

Ответ: четырехугольник $OACB$ – параллелограмм.

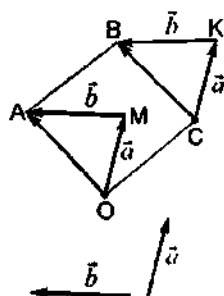


Рис 51

2. Разобрать задачу № 759 (а).

3. Решить самостоятельно задачи № 754, 762 (а, б, в).

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пп. 79, 80; вопросы 7–10.

Решить задачу № 117 из рабочей тетради и задачи № 753, 759 (б), 763 (б, в) из учебника.

Урок 6

Сумма нескольких векторов

Цели урока:

- Ввести понятие суммы двух и более векторов.
- Научить строить сумму нескольких векторов, используя правило многоугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 117 и № 763 (б, в).

Задача № 763

$$б) |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = 6 + 8 = 14$$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 10.$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \text{ по теореме Пифагора.}$$

$$в) |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}| = 6 + 8 = 14.$$

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, где $ABCD$ – параллелограмм (см. рис. 52).

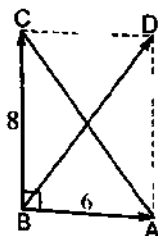


Рис 52

В параллелограмме $ABCD$ — $\angle B = 90^\circ$, значит, $ABCD$ — прямоугольник, тогда диагонали AC и BD данного прямоугольника равны, т.е. $BD = AC = 10$. Поэтому, $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BD}| = 10$.

Ответ: б) $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = 14$; $|\vec{AB} + \vec{BC}| = 10$;

в) $|\vec{BA}| + |\vec{BC}| = 14$; $|\vec{BA} + \vec{BC}| = 10$.

Задача № 117

Используя правило параллелограмма, постройте векторы $\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\vec{CT} = \vec{y} + \vec{x}$. Докажите, что $\vec{OC} = \vec{PT}$.

Решение (рис. 53):

Отложим от точки O векторы $\vec{OA} = \vec{x}$ и $\vec{OB} = \vec{y}$. Построим точку P так, чтобы четырехугольник $OAPB$ был параллелограммом, тогда по правилу параллелограмма $\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$. Отложим от точки C векторы $\vec{CM} = \vec{y}$ и $\vec{CE} = \vec{x}$. Построим параллелограмм $CMTE$, тогда по правилу параллелограмма $\vec{CT} = \vec{y} + \vec{x}$.

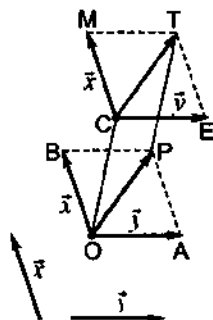


Рис. 53

Т. к. $\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{CT} = \vec{y} + \vec{x}$ и $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (переместительный закон сложения векторов), то $\vec{OP} = \vec{CT}$. Следовательно, четырехугольник $OPTC$ — параллелограмм, а потому $\vec{OC} = \vec{PT}$, что и требовалось доказать.

III. Актуализация знаний учащихся

Фронтальная работа с классом

1. Упростите выражения:

а) $\vec{AB} + \vec{BC}$;

б) $(\vec{MN} + \vec{NK}) + \vec{KE}$;

в) $\vec{MN} + \vec{XY} + \vec{NX}$.

2. Найдите вектор $\vec{x}$:

а) $\vec{AB} + \vec{x} = \vec{AK}$;

б) $(\vec{PE} + \vec{EF}) + \vec{x} = \vec{PA}$;

в) $\vec{MN} + \vec{x} + \vec{NA} = \vec{ME} + \vec{EP}$.

3. Среди данных сумм найдите равные: $\vec{EC} + \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BK}$; $\vec{AB} + \vec{DA}$; $\vec{EC} + \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BK}$; $\vec{DM} + \vec{KB} + \vec{MK}$; $\vec{CE} + \vec{KD} + \vec{EK}$; $\vec{MK} + \vec{NM} + \vec{EN}$.

Индивидуальная работа по карточкам

I уровень (карточка № 1)

- Рис. 54. Постройте вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, пользуясь правилом:
 - треугольника;
 - параллелограмма.
- Упростите выражение:
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
 - $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{NK}$.
- Найдите вектор $\vec{x}$ из условия:
 - $\overrightarrow{MK} + \vec{x} = \overrightarrow{ME}$;
 - $\vec{x} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$.

II уровень (карточка № 2)

- Рис. 55. Отметьте точку M и постройте вектор $\overrightarrow{MN}$, равный $\vec{a} + \vec{b}$, используя правило параллелограмма, и вектор $\overrightarrow{MK}$ равный $\vec{b} + \vec{c}$, используя правило треугольника.
- Упростите выражение:
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EK}$;
 - $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{BE}$.
- $ABCD$ – параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

III уровень (карточка № 3)

- Дано: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (см. рис. 56).
Построить сумму векторов $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
- Упростите выражение: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{QA}$.
- Найдите вектор $\vec{x}$ из условия: $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \vec{x} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{RQ}$.
- На рис. 57 $ABCD$ и $DCFE$ – параллелограммы.
Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD}$.



Рис. 54

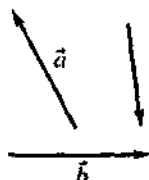


Рис. 55

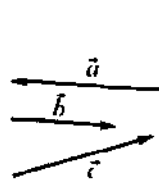


Рис. 56

IV. Изучение нового материала

1. Работа в группах.

Решить задачу: построить сумму векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, изображенных на рис. 58.

2. Обсудить решение задачи, заслушав различные способы.

Вывод: Чтобы построить сумму нескольких векторов, нужно построить сумму двух первых векторов, к полученному вектору прибавить третий вектор и т. д. Это правило сложения векторов называется *правилом многоугольника*.

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 121 (рабочая тетрадь для 8 класса, с. 57).

Задача № 121

Пользуясь правилом многоугольника и законами сложения векторов, упростите выражение: $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM} &= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM} = \\ &= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{BP}\end{aligned}$$

Ответ: $\overrightarrow{BP}$.

2. Разобрать решение задачи:

$ABCD$ и $ADEF$ – параллелограммы. Укажите такой вектор $\vec{a}$ такой, что $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} + \vec{a} = \overrightarrow{AF}$.

Решение (рис. 59):

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} + \vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \vec{a}.$$

Так как $ADEF$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

$$\text{Тогда } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \vec{a} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + \vec{a} = \overrightarrow{AE} + \vec{a}.$$

По условию задачи $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} + \vec{a} = \overrightarrow{AF}$, т. е. $\overrightarrow{AE} + \vec{a} = \overrightarrow{AF}$, следовательно $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ ($\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$).

Ответ: $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$.

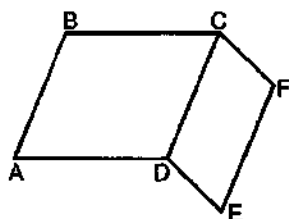


Рис 57

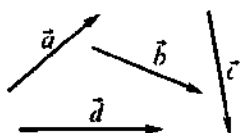


Рис 58

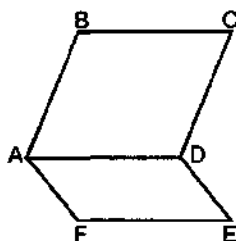


Рис 59

3. Самостоятельно решить задачи:

1) $ABCD$ – ромб, $CDEF$ – прямоугольник.

а) Упростите выражение $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EF}$.

б) Найдите вектор $\vec{b}$ такой, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Решение:

а) Так как $ABCD$ – ромб, $CDEF$ – прямоугольник, то $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$, тогда:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}.$$

б) Так как $ABCD$ – ромб, $CDEF$ – прямоугольник, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$, тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} + \vec{b} &= \\ (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}) + \vec{b} &= \overrightarrow{AD} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Т. к. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, то $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{DC}$.

4. Самостоятельно решить задачи № 119, № 120 (рабочая тетрадь для 8 класса, с. 56, 57).

Задача № 119

Дано: В трапеции $ABCD$, изображенной на рис. 60, $AD \parallel BC$,

$$\angle ABC = 120^\circ,$$

$$AD = 6 \text{ см}, AB = 3 \text{ см}.$$

Найдите $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}|$.

Решение: По правилу треугольника:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}, \text{ следовательно,}$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|. \text{ Длина вектора } \overrightarrow{BD} -$$

это длина отрезка BD . Так как $AD \parallel BC$, то

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ.$$

Проведем высоту BH трапеции. В прямоугольном треугольнике

$$ABH \text{ имеем: } BH = AB \cdot \sin \angle BAD = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} : 2 \text{ (см).}$$

$$AH = AB \cdot \cos \angle ABD = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \text{ (см).}$$

Из треугольника BHD по теореме Пифагора получаем:

$$BD^2 = BH^2 + (AD + AH)^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 9 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ откуда } BD = 3 \text{ см.}$$

Ответ: 3 см.

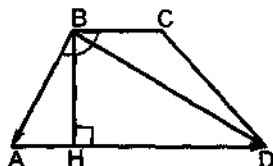


Рис. 60

Задача № 120

Пользуясь правилами и законами сложения векторов, упростите выражение $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT}$.

Решение:	Обоснование:
$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT} =$	сочетательный закон
$= (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{CT} =$	переместительный закон
$= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{CT} =$	правило треугольника
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AT}$	правило треугольника

Ответ: $\overrightarrow{AT}$.

VI. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

П. 81; вопрос 11.

Решить задачи № 755, 760, 761, задачу № 118 из рабочей тетради для 8 класса (с. 56).

Домашнее задание можно дать дифференцированно:

I уровень – № 755, 760, 761, № 118.

II уровень – № 760, дополнительные задачи.

Дополнительные задачи

1. Даны два параллелограмма $MNKP$ и M_1NK_1P . Докажите, что $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{K_1K}$.
2. В треугольнике ABC M – точка пересечения медиан. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Урок 7

Вычитание векторов

Цели урока:

- Ввести понятия разности двух векторов; противоположенных векторов.
- Научить строить разность двух данных векторов двумя способами.
- Рассмотреть теорему о разности двух векторов.
- Научить решать задачи на вычитание векторов.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Проверка домашнего задания**

1. Проверить решение домашней задачи № 118 из рабочей тетради, дополнительных задач.

Задача № 118

а) Постройте векторы $\overrightarrow{OT} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{PM} = \vec{y} + \vec{z}$.

б) Отложите от точки H векторы $\vec{m} = \overrightarrow{OT} + \vec{z}$ и $\vec{n} = \vec{x} + \overrightarrow{PM}$.

в) Докажите, что $\vec{m} = \vec{n}$.

Решение (рис. 61):

Так как $\overrightarrow{OT} = \vec{x} + \vec{y}$, то $\vec{m} = \overrightarrow{OT} + \vec{z} = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$. Так как $\overrightarrow{PM} = \vec{y} + \vec{z}$, то $\vec{n} = \vec{x} + \overrightarrow{PM} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

В соответствии с сочетательным законом сложения векторов выполняется равенство:

$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$, а значит, $\vec{m} = \vec{n}$, что и требовалось доказать.

Дополнительная задача № 1

Решение (см. рис. 62):

Так как $MNKP$ и M_1NK_1P – параллелограммы, то $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{NM_1} = \overrightarrow{K_1P}$, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM_1}$, $\overrightarrow{K_1K} = \overrightarrow{K_1P} + \overrightarrow{PK}$.

Так как $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{NM_1} = \overrightarrow{K_1P}$, то $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM_1} = \overrightarrow{K_1P} + \overrightarrow{PK}$, поэтому $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{K_1K}$.

Дополнительная задача № 2

Решение (см. рис. 63):

По правилу треугольника $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1A}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1B}$. Так как CC_1 – медиана, то $C_1A = C_1B$. Векторы $\overrightarrow{C_1A}$ и $\overrightarrow{C_1B}$ равны по длине, но противоположно направлены, тогда $\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B} = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1A}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1B}) = (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_1}) + (\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B}) = \\ &= 2 \cdot \overrightarrow{MC_1} + 0 = 2 \cdot \overrightarrow{MC_1},\end{aligned}$$

M – точка пересечения медиан, поэтому $2MC_1 = MC \Rightarrow$

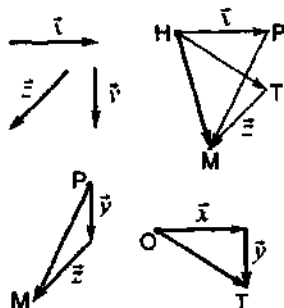


Рис 61

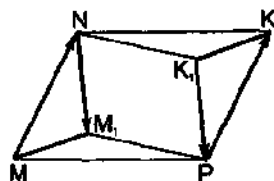


Рис 62

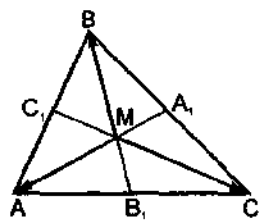


Рис 63

$\Rightarrow 2 \cdot |\overline{MC_1}| = |\overline{MC}|$. Векторы $\overline{MC_1}$ и $\overline{MC}$ противоположно направлены, поэтому $2\overline{MC_1} + \overline{MC} = \vec{0}$, тогда $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = (\overline{MA} + \overline{MB}) + \overline{MC} = 2\overline{MC_1} + \overline{MC} = \vec{0}$.

III. Повторение с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

- Что значит, из числа a вычесть число b ? (Разностью чисел a и b называется такое число c , что $b + c = a$.)
- Найдите вектор $\vec{x}$ из равенства: а) $\vec{x} - \overline{AB} = \overline{BC}$, б) $\vec{x} - \overline{CD} = \overline{MC}$.
- Сформулируйте правило вычитания двух отрицательных чисел. (Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$.)
- Укажите вектор, противоположный вектору $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{KE}$.
- Упростите выражение:
 - а) $\overline{AB} + (-\overline{CB})$;
 - б) $\overline{MN} + (-\overline{KN})$;
 - в) $\overline{CD} + (-\overline{ED})$.

IV. Изучение нового материала

1. Ввести понятие разности двух векторов.
2. Рассмотреть задачу о построении вектора, равного $\vec{a} - \vec{b}$ с использованием правила треугольника.
3. Доказать теорему о разности двух векторов.
4. Рассмотреть задачу о построении разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с использованием теоремы о разности двух векторов.

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 122, 123 (8 класс, с. 57, 58).

Задача № 122

В трапеции $ВСЕН$, изображенной на рис. 64, $ВН = 2СЕ$, точка O – середина $ВН$. Какие векторы с концом и началом в отмеченных точках являются противоположными вектору $\overline{ОН}$?

Решение:

По определению противоположным вектору является вектор $\overline{ОН}$, направление которого противоположно направлению вектора $\overline{ОН}$, а длина равна длине вектора $\overline{ОН}$.

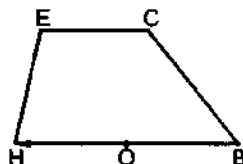


Рис 64

Противоположно направлены вектору $\overrightarrow{OH}$ векторы $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$. Из них имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{OH}$, векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$.

Итак, противоположными вектору $\overrightarrow{OH}$ являются векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$.

Ответ: $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{EC}$.

Задача № 123

Какой из векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PC}$ равен разности векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MP}$?

Решение:

По определению разностью векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MP}$ является вектор $\vec{x}$, такой, что $\overrightarrow{MP} + \vec{x} = \overrightarrow{MC}$.

Проверим, какой из данных векторов удовлетворяет этому условию:

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC}, \text{ следовательно, } \overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}.$$

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CP} \neq \overrightarrow{MC}, \text{ следовательно, } \overrightarrow{CP} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}.$$

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{MC}, \text{ т. е. } \overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}.$$

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC}, \text{ т. е. } \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}.$$

Ответ: $\overrightarrow{PC}$.

2. Разобрать решение задачи № 762 (г, д).

3. Решить самостоятельно задачи № 756, 764, 766.

Задача № 762

г) Но правилу треугольника $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, тогда $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$, поэтому $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$.

Ответ: a .

Задача № 756

Дано: см. рис. 65.

Построить:

а) $\vec{x} - \vec{y}$;

б) $\vec{z} - \vec{y}$;

в) $\vec{x} - \vec{z}$;

г) $-\vec{x}$;

д) $-\vec{y}$;

е) $-\vec{z}$.

Построение:

а) $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$. Рис. 66 а).

б) $\vec{z} - \vec{y} = \vec{z} + (-\vec{y})$ Рис. 66 б).

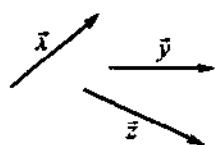
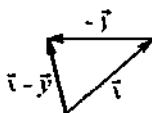
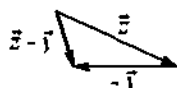


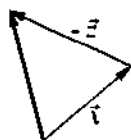
Рис. 65



а)



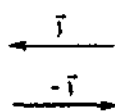
б)



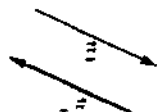
в)



г)



д)



е)

Рис. 66

в) $\vec{x} - \vec{z} = \vec{x} + (-\vec{z})$ Рис. 66 в).

г) Рис. 66 г).

д) Рис. 66 д).

е) Рис. 66 е).

Задача № 764

$$\begin{aligned} \text{а) } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{KD}) &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DK}) = \\ &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}) &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}) = \\ &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AM}$.

Задача № 766

$$\overrightarrow{xy} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}.$$

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 82; вопросы 12, 13.

Решить задачи № 757, 763 (а, г), 765, устно № 767, задачу № 124 из рабочей тетради.

Урок 8

Решение задач по теме «Сложение и вычитание векторов»

Цели урока:

- Закрепление теоретического материала.
- Совершенствование навыков решения задач по данной теме.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос. К доске выходят 5 учеников и готовят ответ на данный вопрос. Слушает их ответ весь класс.

Дано: см. рис. 67.

Найти:

- $\vec{a} + \vec{b}$, используя правило треугольника;
- $\vec{c} + \vec{d}$, используя правило параллелограмма;
- $\vec{c} - \vec{b}$, используя теорему о разности двух векторов;
- $\vec{d} - \vec{a}$, используя правило вычитания векторов;
- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, используя правило многоугольника.

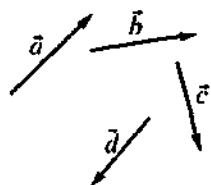


Рис. 67

III. Проверка домашнего задания. Повторение

1. Проверить решение задачи № 124 из рабочей тетради (один из учащихся читает решение задачи по своей тетради, остальные проверяют, по необходимости делают замечания, дополнения, исправления).

Задача № 124

Докажите, что для любых трех точек X, Y, Z верно равенство $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{YZ}$.

Доказательство: По теореме о разности векторов $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, поэтому $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XY} + (-\overrightarrow{ZY})$. Запись $-\overrightarrow{ZY}$ означает «вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{ZY}$ », т. е. $-\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{YZ}$. Следовательно, $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XY} + (-\overrightarrow{ZY}) = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$, что и требовалось доказать.

2. Проверить домашнюю задачу № 765 (один из учащихся в начале урока вызывается к доске и записывает решение).

Задача № 765

$$\vec{p} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0};$$

$$\vec{q} = (\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XZ}) + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{YZ} = (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) + \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZX} = \vec{0};$$

$$\vec{r} = (\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XY}) - \overrightarrow{ZX} = (\overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{YX}) + \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{ZZ} = \vec{0}.$$

3. Разобрать задачу № 128 из рабочей тетради для 8 класса.

Задача № 128

Дано: В трапеции $ABCD$, изображенной на рис. 68, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AD = 6$ м, $AB = 3$ м. Найдите $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Решение: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, следовательно,

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = \overrightarrow{DB}. \text{ Т. к. } \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC},$$

то $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$.

Проведем высоту BH трапеции. В треугольнике ABH имеем:

$$BH = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (м)},$$

$$HA = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{2} \text{ (м)}. \text{ Тогда } DH = AD - HA = 4,5 \text{ (м)}.$$

Из треугольника BHD по теореме Пифагора находим:

$$BD^2 = DH^2 + BH^2 = \left(4,5^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = 27 \text{ (м}^2\text{)}, \text{ откуда } BD = 3\sqrt{3} \text{ м}.$$

$$\text{Итак, } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = \overrightarrow{BD} = 3\sqrt{3} \text{ (м)}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}$ м.

4. Разобрать задачи № 768, 771.

Задача № 768

Решение (рис. 69):

а) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\vec{a}$ (так как

$\overrightarrow{AM} \uparrow \downarrow \overrightarrow{BM}$, M – середина AB);

б) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} = \vec{b}$ (т. к. $\overrightarrow{AN} \uparrow \downarrow \overrightarrow{NC}$, N – середина AC);

в) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$, тогда
 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$;

г) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} =$
 $= -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a}.$

Ответ: а) $\overrightarrow{BM} = -\vec{a}$; б) $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$; в) $\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a}$; г) $\overrightarrow{BN} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a}.$

Наводящие вопросы:

- Что вы можете сказать о направлении векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$? А о их длине?
- Что можно сказать о векторах $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{NC}$?
- Как связаны между собой векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{MN}$? Выразите $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

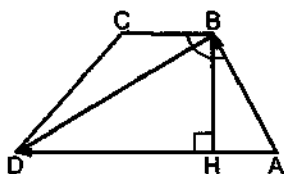


Рис. 68

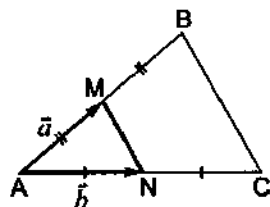


Рис. 69

- Как связаны между собой векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BN}$? Чему равна длина вектора $\overrightarrow{AB}$?

Задача № 771

Решение (рис. 70):

- 1) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} =$
 $= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b};$
- 2) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b};$
- 3) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} =$
 $= \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$ (т. к. $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$);
- 4) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}.$

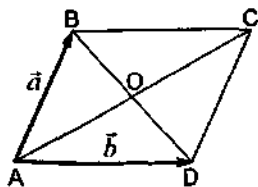


Рис. 70

Ответ:

- 1) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b};$
- 2) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b};$
- 3) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = -\vec{a};$
- 4) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}.$

Наводящие вопросы:

- Чему равна сумма векторов $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$? Какая связь существует между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{DB}$?
- Упростите сумму $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$. Каким вектором можно заменить вектор $\overrightarrow{BC}$? Почему?
- Замените сложением разность $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$. В сумме $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$ замените один из векторов равным ему так, чтобы получилось сложение векторов правилом треугольника. Что вы можете сказать о векторах $\overrightarrow{BA}$ и $\vec{a}$?
- Замените разность $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ сложением. Выразите вектор $\overrightarrow{BA}$ через один из данных векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$.

III. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Постройте векторы $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC точка B_1 – середина основания AC .
 - а) Упростите выражение $\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B_1C}$;
 - б) Найдите $|\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B_1C}|$, если $AB = 10$ см, $BB_1 = 8$ см.

II вариант

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}, \vec{k}, \vec{c}$. Постройте векторы $\vec{k} + \vec{c}, \vec{k} - \vec{p}$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена медиана CC_1
 - а) Упростите выражение $\overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$;
 - б) Найдите $|\overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}|$, если $AC = 5$ см, $AB = 6$ см.

II уровень**I вариант**

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Постройте векторы $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{b} - \vec{c}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей.
 - а) Упростите выражение $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}$;
 - б) Найдите $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}|$, если $AD = 8$ см, $CD = 6$ см, а перпендикуляр, опущенный из вершины D на диагональ AC равен 4 см.

II вариант

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}$. Постройте векторы $\vec{p} + \vec{c} + \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей.
 - а) Упростите выражение $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{OD}$;
 - б) Найдите $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{OD}|$, если $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, а перпендикуляр, опущенный из вершины B на диагональ AC равен 8 см.

III уровень**I вариант**

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Постройте векторы $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, меньшее основание равно боковой стороне, а высота, опущенная из вершины тупого угла B , равна 4 см. Найдите $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}|$.

II вариант

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}, \vec{k}, \vec{m}, \vec{n}$. Постройте векторы $-\vec{p} - \vec{k} + \vec{m} + \vec{n}, \vec{m} - \vec{p} + \vec{k} - \vec{n}$.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание равно боковой стороне, большее основание AD равно 20 см, $\angle A = 60^\circ$. Найдите $|\vec{DC} - \vec{DA} - \vec{AB}|$.

Ответы к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

2. а) $\vec{CA}$; б) 12 см.

II вариант

2. а) $\vec{CC_1}$; б) 4 см.

II уровень

I вариант

2. а) $\vec{CO}$; б) $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (см).

II вариант

2. а) $\vec{AO}$; б) $3 + 2\sqrt{5}$ (см).

III уровень

I вариант

2. $8 + 8\sqrt{3}$ (см).

II вариант

2. 10 см.

IV. Подведение итогов урока

Решить задачи: № 769, 770, 772 и задачи № 125, 126 (из рабочей тетради для 8 класса).

Урок 9

Умножение вектора на число

Цели урока:

- Ввести понятия умножения вектора на число.
- Ознакомить учащихся со свойствами умножения вектора на число.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Проверить решение домашних задач № 125, 126 из рабочей тетради (один из учащихся из своей тетради читает решение, остальные проверяют свое решение, а затем идет обсуждение правильности решения).

Задача № 125

Упростите выражение $(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{TX})$.

Решение:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{TX}) &= (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} + (-\overrightarrow{TX})) - (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XT}) = \\&= (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AT}) - \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{HT} + (-\overrightarrow{PT}) = \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{HP}.\end{aligned}$$

Ответ: $\overrightarrow{HP}$.

Задача № 126

Решение (рис. 71):

Отрезок AM – медиана треугольника ABC . Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{MC} = \vec{y}$.

Ответ: $\overrightarrow{BM} = \vec{y}$; $\overrightarrow{AM} = \vec{y} - \vec{x}$;

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{y} - \vec{y} + \vec{x}.$$

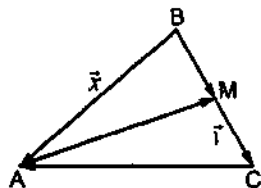


Рис. 71

III. Актуализация знаний учащихся

1. Индивидуальное задание 2–3 учащимся: решить задачу № 127 из рабочей тетради (учащиеся работают самостоятельно, по окончании работы тетради сдают на проверку учителю).

Задача № 127

Найдите вектор $\vec{x}$, если:

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$;

б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$;

в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$.

Решение:

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, следовательно, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PM} + \vec{x}$, откуда $\vec{x} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO}$;

б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$, откуда $\vec{x} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA}$;

в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, поэтому $\vec{x} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CP}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{MO}$; б) $\overrightarrow{PA}$; в) $\overrightarrow{CP}$.

2. Фронтальная работа с учащимися: решение задач на готовых чертежах (устно, один из учащихся предлагает свое решение, остальные обсуждают его правильность).

1. Рис. 72. Найдти: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$;

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$.

2. Рис. 73.

Доказать: $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

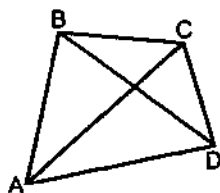


Рис 72

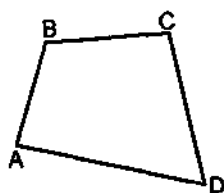


Рис 73

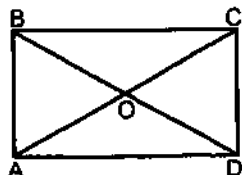


Рис 74

3. Рис. 74. Дано: $ABCD$ – прямоугольник.

Доказать:

а) $|\vec{AB} + \vec{BC}| = 2 \cdot |\vec{AO}|$;

б) $\vec{BA} - \vec{DA} = \vec{OD} - \vec{OB}$.

Найти: $|\vec{AO} - \vec{DO} - \vec{CD}|$, если $AB = 5$; $AD = 12$.

III. Изучение нового материала

Задача 1

(Задача для самостоятельного решения, один из учащихся решает на переносной доске)

Задание: начертите вектор $\vec{a}$ и вектор $\vec{b}$ так, что:

а) $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, $|\vec{b}| = 3 \cdot |\vec{a}|$;

б) $\vec{b} \downarrow \vec{a}$, $|\vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}|$.

Задача 2

(Для самостоятельного решения или для работы в группах с последующим обсуждением)

Катер движется прямолинейно со скоростью $\vec{v}$ и обгоняет пловца, плывущего в том же направлении со скоростью в три раза меньшей скорости катера. Навстречу им движется моторная лодка со скоростью, превышающей скорость пловца в два раза. Изобразите с помощью векторов скорости катера, моторной лодки и пловца.

После обсуждения решения задач 1 и 2 ввести понятие умножения ненулевого вектора на число; сформулировать основные свойства умножения вектора на число.

На доске и в тетрадях учащихся записывается краткое определение, следствия из него и свойства умножения вектора на число:

$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$, если:

1. $|\vec{b}| = k \cdot |\vec{a}|$;

2. $\vec{b} \uparrow \vec{a}$ при $k > 0$, $\vec{b} \downarrow \vec{a}$ при $k < 0$.

Следствия из определения:

1. $\vec{a} \cdot 0 = 0$;
2. Для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ коллинеарны.

Основные свойства умножения вектора на число:

Для любых чисел k и l и векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1. $(kl)\vec{a} = k \cdot (l\vec{a})$ (сочетательный закон);
2. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон);
3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 129, 130 из рабочей тетради для 8 класса.

Задача № 129

Отложите от точки O на рис. 75 векторы $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{y} = 2\vec{c}$,

$$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c}.$$

Решение (рис. 75):

Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, то, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{x} \uparrow \vec{a}$ и $|\vec{x}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$. Отложим от точки O вектор $\vec{x}$.

Аналогично $\vec{y} \uparrow \vec{c}$ и $|\vec{y}| = 2|\vec{c}|$. Отложим от точки O вектор $\vec{y}$. $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c} = \vec{x} + \vec{y}$. Так как векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ отложены от точки O , строить вектор $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ удобно по правилу параллелограмма. Строим вектор $\vec{z}$.

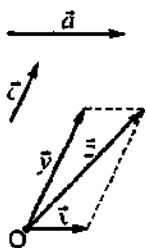


Рис 75

Задача № 130

На рис. 76 изображен параллелограмм $ABCD$, где $DM = CM$, $\vec{AO} = \vec{n}$, $\vec{AB} = \vec{a}$.

Выразите:

- а) векторы $\vec{AC}$ и $\vec{CO}$ через вектор $\vec{n}$;
- б) векторы $\vec{DM}$ и $\vec{CM}$ через вектор $\vec{a}$;
- в) вектор $\vec{BC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$.

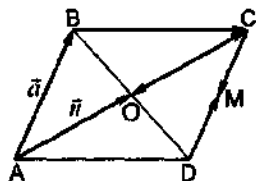


Рис 76

Решение:

а) Так как точка O является точкой пересечения диагоналей параллелограмма, то $AO = \frac{1}{2}AC$, и значит, $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AO}|$. Кроме того, $\overrightarrow{AC} \uparrow \uparrow \vec{n}$, следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AO} = 2 \cdot \vec{n}$. Далее, $|\overrightarrow{CO}| = |\overrightarrow{AO}|$ и $\overrightarrow{CO} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AO}$, поэтому $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO} = -\vec{n}$.

б) Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, поэтому $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Далее, $\overrightarrow{DM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{DM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DC}|$, следовательно, согласно определению умножения вектора на число, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$.

Так как $CM \uparrow \downarrow DC$ и $|CM| = \frac{1}{2}|DC|$, то $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\vec{a}$.

в) По правилу треугольника $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. Но $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$, следовательно, $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 2\vec{n}$.

Ответ:

а) $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$, $\overrightarrow{CO} = -\vec{n}$;

б) $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{a}$;

в) $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 2\vec{n}$.

2. Выполнить практические задания №776 (б, г, д), 777.

3. Решить задачи № 779, 781 (а), 780 (б).

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 83; вопросы 14 – 17;

Выполнить практические задания № 775, 776 (а, в, е).

Решить задачи № 781 (б, в), 780 (а).

Урок 10

Умножение вектора на число

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на применение свойств умножения вектора на число.

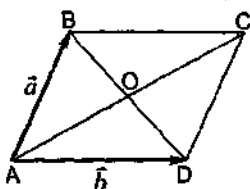


Рис 77

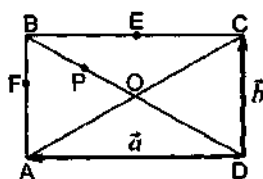


Рис 78

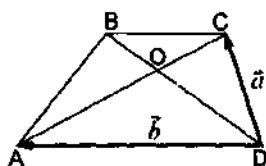


Рис 79

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Фронтальный опрос по вопросам 14–17.

Устное решение задач на готовых чертежах.

1. Рис. 77. Дано:
- $ABCD$
- параллелограмм,
- $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$
- ,
- $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$
- .

Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$.

2. Рис. 78. Дано:
- $ABCD$
- прямоугольник,
- $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$
- ,
- $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$
- .

 E – середина BC , $F \in AB$, $AF : FB = 3 : 2$, P – середина OB .Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{FE}$.

3. Рис. 79. Дано:
- $ABCD$
- трапеция,
- $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$
- ,
- $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$
- ,
- $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$
- .

Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$.

Карточки для индивидуальной работы

I уровень (карточка № 1)

1. Рис. 80.

Построить:

- а)
- $\frac{1}{2} \vec{a}$
- ; б)
- $2\vec{b}$
- ; в)
- $\frac{1}{2} \vec{a} + 2\vec{b}$
- ; г)
- $2\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}$
- .

2. Рис. 81. Дано:
- $ABCD$
- параллелограмм.

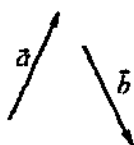
Выразите $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Рис 80

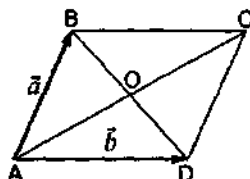


Рис 81



Рис 82

II уровень (карточка № 2)

1. Рис. 82.

Построить векторы:

а) $-\frac{5}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$;

б) $\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{14}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.

2. Рис. 83. Дано: $ABCD$ – ромб, $E \in BC$, $BE : EC = 3 : 1$, K – середина DC , $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.Выразите $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

III уровень (карточка № 3)

1. Рис. 84. Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Построить векторы:

а) $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{10}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$;

б) $\frac{2}{9}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{9}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. Точка M лежит на диагонали ромба $ABCD$, а точка H – на стороне AD , причем $AM : MC = 2 : 1$ и $AH = HD$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

III. Решение задач

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 132 (рабочая тетрадь для 8 класса, с. 62).

Задача № 132

Докажите, что векторы $\vec{c} = 2(\vec{a} + 1,5\vec{p}) - 3\vec{p}$ и $\vec{a}$ коллинеарные.

Доказательство:

$$\vec{c} = 2(\vec{a} + 1,5\vec{p}) - 3\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{p} - 3\vec{p} = 2\vec{a} + (3-3)\vec{p} = 2\vec{a} + 0\vec{p} = 2\vec{a}.$$

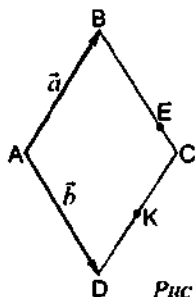
По определению произведения вектора на число векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ коллинеарные, что и требовалось доказать.

Рис 83

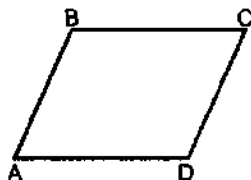


Рис 84

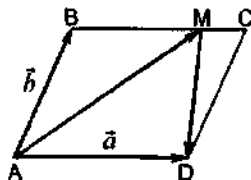


Рис 85

2. Разобрать задачу № 783

Задача № 783

Решение (рис. 85):

1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

Так как $BM : MC = 3/4 AD$, тогда $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$.

$$2) \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \\ = -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}.$$

Ответ: 1) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$; 2) $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$.

Наводящие вопросы (использовать по необходимости):

- Рассмотрим $\triangle ABM$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BM}$.
- Что вы можете сказать о направлениях векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\vec{a}$?
- Какую часть от длины вектора $\vec{a}$ составляет длина вектора $\overrightarrow{BM}$?
- Выразите в равенстве $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- Найдите фигуру, в которой имеется вектор $\overrightarrow{MD}$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или векторы, уже выраженные через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(В данном случае учащиеся могут предложить два варианта ответа: а) четырехугольник $ABMD$; б) треугольник AMD .)

- Составьте равенство, из которого вектор $\overrightarrow{MD}$ можно выразить через другие векторы.

3. Решить самостоятельно задачи:

I уровень – № 784 (а), 786;

II уровень – № 786, дополнительные задачи.

Задача № 784 (а)

Решение (рис. 86): так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = CD$, $BC = AD$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AO = OC$, $BO = OD$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y};$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y};$$

$$\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO} = -\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}\right) = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y};$$

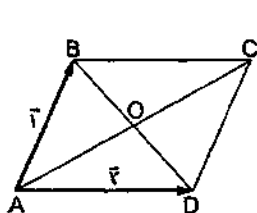


Рис. 86

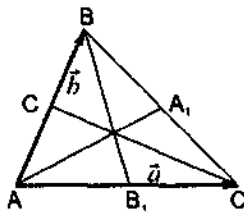


Рис. 87

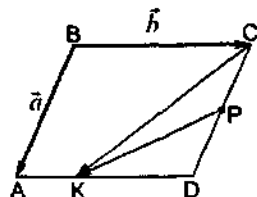


Рис. 88

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO} = -\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}.$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{x};$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \vec{x} + \left(-\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}\right) = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y};$$

$$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y}.$$

Задача № 786

Решение (рис. 87): т. к. AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы, то $AC_1 = C_1B$, $AB_1 = B_1C$.

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\text{Ответ: } \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}; \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}; \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Дополнительная задача 1

В параллелограмме $ABCD$ на сторонах CD и AD отмечены соответственно точки P и K так, что $CP : PD = 2 : 3$, $AK : KD = 1 : 2$. Выразите векторы $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{PK}$ через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

Решение (рис. 88):

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}.$$

$$\text{Так как } AK : KD = 1 : 2, \text{ то } AK = \frac{1}{3}AD, \text{ тогда } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CK}.$$

Так как $CP : PD = 2 : 3$, то $PC = \frac{2}{5}CD$, тогда $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$,
 т. е. $\overrightarrow{PK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{7}{5}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{CK} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$; $\overrightarrow{PK} = \frac{7}{5}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

Дополнительная задача 2

В трапеции $ABCD$ основание AB в три раза меньше основания CD , M – середина стороны BC , а на стороне AB отмечена точка N так, что $\frac{AN}{NB} = \frac{3}{4}$. Выразите через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{DA}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{DC}$ векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MN}$.

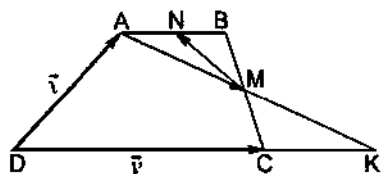


Рис. 89

Решение (рис. 89):

Продолжим прямые DC и AM ($DC \cap AM = K$).

$\triangle ABM = \triangle KCM$ ($BM = MC$, так как M – середина BC ; $\angle BMA = \angle CMK$ как вертикальные, $\angle ABM = \angle MCK$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC и секущей BC) $\Rightarrow AB = CK$, $AM = MK$.

Так как AB в три раза меньше DC , то $AB = \frac{1}{3}DC \Rightarrow$

$$\Rightarrow CK = \frac{1}{3}DC \Rightarrow DK = DC + CK = DC + \frac{1}{3}DC = \frac{4}{3}DC, \quad \overrightarrow{DK} = \frac{4}{3}\vec{y}.$$

N – середина $AB \Rightarrow AN = \frac{1}{2}AB$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DK}) = \frac{1}{2}\left(-\vec{x} + \frac{4}{3}\vec{y}\right) = \\ &= \frac{2}{3}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\left(\frac{2}{3}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{y}\right) = \\ &= -\frac{2}{3}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{6}\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}.\end{aligned}$$

Ответ: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$.

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Начертите вектор $\vec{x}$ такой, что $|\vec{x}| = 2$ см. Постройте векторы $3\vec{x}, -2\vec{x}, \frac{1}{2}\vec{x}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 2 : 1$, O – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\vec{OC}$ и $\vec{CK}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$.

II вариант

1. Начертите вектор $\vec{a}$, абсолютная величина которого равна 3 см. Постройте векторы $2\vec{a}, -\vec{a}, \frac{1}{3}\vec{a}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC взята точка P так, что $BP : PC = 3 : 1$, O – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\vec{AO}$ и $\vec{PA}$ через векторы $\vec{x} = \vec{AB}$ и $\vec{y} = \vec{AD}$.

II уровень

I вариант

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что $|\vec{a}| = 2$ см, $|\vec{b}| = 3$ см. Постройте вектор $\frac{1}{3}\vec{b} - 2\vec{a}$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что M – середина BC , $CN : ND = 1 : 3$. Выразите векторы $\vec{AM}$, $\vec{AN}$ и $\vec{MN}$ через векторы $\vec{x} = \vec{AB}$ и $\vec{y} = \vec{AD}$.

II вариант

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ так, что $|\vec{x}| = 3$ см, $|\vec{y}| = 4$ см. Постройте вектор $\frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{x}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и AD взяты точки M и N соответственно так, что M – середина AB , $AN : ND = 1 : 2$. Выразите векторы $\vec{CM}$, $\vec{CN}$ и $\vec{MN}$ через векторы $\vec{a} = \vec{CB}$ и $\vec{b} = \vec{CD}$.

III уровень

I вариант

1. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С помощью циркуля и линейки без делений постройте вектор $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD и диагонали AC лежат точки H и M соответственно так, что $AM : MC = 2 : 3$, $AH : HD = 1 : 2$. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

II вариант

1. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С помощью циркуля и линейки без делений постройте вектор $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AB и диагонали AC взяты точки E и K соответственно так, что $AE : EB = 3 : 2$, $AK : KC = 5 : 2$. Выразите векторы $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

Ответы к задачам самостоятельной работы**I уровень****I вариант**

$$2. \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \overrightarrow{CK} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}.$$

II вариант

$$2. \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}; \overrightarrow{PA} = -\vec{x} - \frac{3}{4}\vec{y}.$$

II уровень**I вариант**

$$2. \overrightarrow{AM} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}; \overrightarrow{AN} = \vec{y} + \frac{2}{3}\vec{x}; \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{x}.$$

II вариант

$$2. \overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}; \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

III уровень**I вариант**

$$2. \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{3}{5}\vec{a}; \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{15}\vec{b}; \overrightarrow{CN} = -\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$$

II вариант

$$2. \overrightarrow{DK} = \frac{5}{7}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b}; \overrightarrow{CE} = -\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}; \overrightarrow{KE} = -\frac{4}{35}\vec{a} - \frac{5}{7}\vec{b}.$$

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

I уровень: решить задачи № 782, 784 (б), 787 – из учебника, № 131 – из рабочей тетради.

II уровень: решить задачи № 782, 784 (б), 785, 787.

Урок 11**Применение векторов к решению задач****Цели урока:**

- Показать применение векторов при решении геометрических задач на конкретных примерах.
- Совершенствовать навыки выполнения действий над векторами.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Анализ ошибок самостоятельной работы**

Провести анализ ошибок самостоятельной работы. Работу над ошибками выполнить дома самостоятельно, используя готовые ответы.

III. Актуализация знаний

Самостоятельное решение задач с последующим обсуждением решения:

1) Упростите выражение $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{KE} - \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{EC}$.

2) Из условия $\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MK} + \vec{x} = \overrightarrow{PK} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{FA}$ найдите вектор $\vec{x}$.

3) В трапеции $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AB = 3 CD$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{DA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{DC}$, векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MN}$, где M – середина BC , а N – точка на стороне AB , такая, что $AN : NB = 2 : 3$.

Индивидуальная работа по карточкам

(Карточки предложить учащимся, не справившимся с задачами самостоятельной работы.)

I уровень (карточка № 1)

– Заполни пропуски в решении.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (рис. 90), $E \in AB$, $AE : EB = 3 : 2$,

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}.$$

Выразить $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CE}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AO} = \dots$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$. Так как $AE : EB = 3 : 2$, то $EB = 2/5 AB$, поэтому $\overrightarrow{BE} = \dots$ Следовательно, $\overrightarrow{CE} = \dots$

Ответ: $\overrightarrow{AO} = \dots$; $\overrightarrow{CE} = \dots$

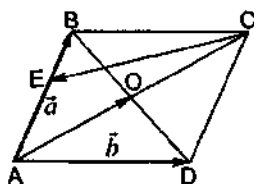


Рис 90

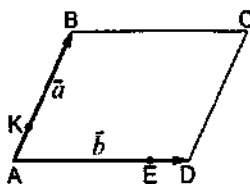


Рис 91

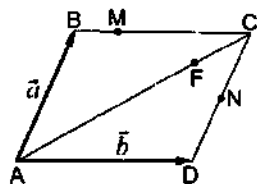


Рис 92

II уровень (карточка № 2)

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (см. рис. 91), $AK : KB = 1 : 3$,

$AE : ED = 4 : 1$, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$.

Выразить $\vec{CK}$, $\vec{CE}$ и $\vec{KE}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Указание: $\vec{CK} = \vec{CB} + \vec{BK}$; $\vec{CE} = \vec{CD} + \vec{DE}$, $\vec{KE} = \vec{KC} + \vec{CE}$,

$$\vec{BK} = -\frac{3}{4}\vec{a}, \quad \vec{DE} = -\frac{1}{5}\vec{b}.$$

III уровень (карточка № 3)

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (рис. 92), $AF : FC = 4 : 1$, $BM : MC = 1 : 3$, N – середина CD , $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$.

Выразить $\vec{AF}$, $\vec{AM}$, $\vec{AN}$, $\vec{MF}$, $\vec{NF}$, $\vec{MN}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Указание: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{MF} = \vec{MA} + \vec{AF}$.

Индивидуальная проверка домашнего задания

Учитель собирает 3–4 тетради и проверяет их пока учащиеся решают самостоятельно задачи, тут же можно обсудить с каждым учеником его ошибки в индивидуальном порядке.

Задача № 131

Упростите выражение:

а) $-0,5(12\vec{a})$;

б) $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q})$.

Решение

а) $-0,5(12\vec{a}) = (-0,5 \cdot 12)\vec{a} = -6\vec{a}$;

б) $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b} = (2,5 - 1,7)\vec{b} = 0,8\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p} = 3\vec{c} + 3\vec{p} - 5\vec{p} = 3\vec{c} + (3\vec{p} - 5\vec{p}) =$
 $= 3\vec{c} + (-2\vec{p}) = 3\vec{c} - 2\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q}) = 10\vec{p} - 6\vec{q} - 9\vec{p} + 6\vec{q} = 10\vec{p} + (-9\vec{p}) = \vec{p}$.

Ответ:

а) $-6\vec{a}$;

б) $0,8\vec{b}$;

в) $3\vec{c} - 2\vec{p}$;

г) $\vec{p}$.

Задача № 785

Решение (рис. 93):

Точки M и N — середины AC и BD , значит $AM = MC$, $BN = ND$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).
 \end{aligned}$$

Задача № 787

Решение (рис. 94):

$$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}, \text{ т. е. } \vec{a} + \overrightarrow{DF} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DO} &= \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} = \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} = \\
 &= \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$

IV. Изучение нового материала

Предложить учащимся решить самостоятельно задачу № 1 из пункта 84, а затем обсудить решение задачи.

Рассмотреть задачу № 2 из пункта 84.

V. Закрепление изученного материала

1. Рассмотреть решение задачи № 134 из рабочей тетради.

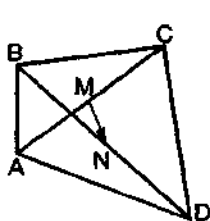


Рис. 93

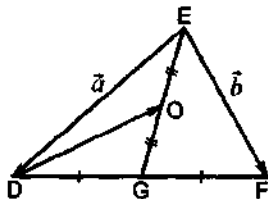


Рис. 94

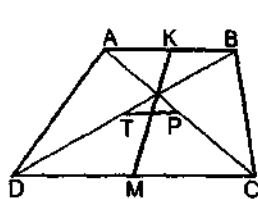


Рис. 95

Задача № 134

Дано: Точки K и M – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, изображенного на рис. 95, точки P и T – середины диагоналей AC и BD . Докажите, что середины отрезков KM и PT совпадают.

Доказательство: Пусть точка X – середина отрезка KM , точка Y – середина отрезка PT . Тогда для произвольной точки O имеем:

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) \quad (1) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT}) \quad (2).$$

По условию задачи точки K и M – середины отрезков AB и CD , следовательно, $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ и $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Аналогично. Подставляя найденные выражения в формулы (1) и (2), получим:

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

$$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$. Так как от точки O можно отложить только один вектор, равный данному, то точки X и Y совпадают, следовательно, совпадают середины отрезков KM и PT , что и требовалось доказать.

2. Решить задачу № 792 (самостоятельно с последующим обсуждением)

Задача № 792

Теорема: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Дано: $\triangle ABC$, MN – средняя линия (рис. 96).

Доказать: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2} AC$.

Доказательство: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \text{ поэтому векторы } \overrightarrow{MN} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{AC} \text{ коллинеарны, а } |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|, \text{ т. е.}$$

$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2} AC.$$

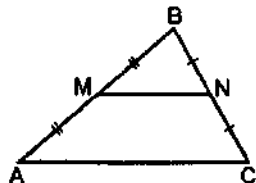


Рис 96

Дополнительная задача 1

Даны четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка O . Известно, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$, $\angle A = 65^\circ$. Найдите остальные углы этого четырехугольника.

Решение:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$. По условию задачи $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB}$, следовательно, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, т. е. $DC \parallel AB$ и $DC = AB$, а значит $ABCD$ – параллелограмм.

$$\angle C = \angle A = 65^\circ, \angle B = \angle D = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

Ответ: $\angle C = 65^\circ, \angle B = \angle D = 115^\circ$.

Дополнительная задача 2

На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и N так, что $AM = 4 BM$, $CH = 4 BH$.

Докажите, что $MN \parallel AC$ и $MN : AC = 1,5$, используя векторы.

Доказательство (рис. 97):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \\ &= \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}, \text{ т. е.}\end{aligned}$$

$$MN \parallel AC, MN = \frac{1}{5}AC \text{ или } MN : AC = 1:5.$$

$$(AM = 4 BM, CH = 4 BH \Rightarrow BM = \frac{1}{5}AB, BH = \frac{1}{5}BC).$$

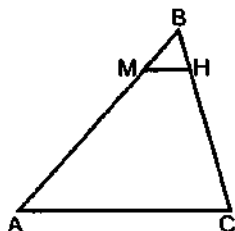


Рис. 97

VI. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

П. 84.

Решить задачи № 789, 790, 791; устно – № 788.

Урок 12**Средняя линия трапеции****Цели урока:**

- Ввести понятие средней линии трапеции.
- Рассмотреть теорему о средней линии трапеции.
- Научить решать задачи на использование свойств средней линии трапеции.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся**

1. Повторение решения задач 1 и 2 из пункта 84 учебника.

2. Решить самостоятельно задачу:

В трапеции $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей BC и AD . Докажите, что точки M , N и O лежат на одной прямой.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие средней линии трапеции, используя рис. 98:

MN – средняя линия трапеции $ABCD$, если M – середина AB , N – середина CD .

2. Доказать теорему о средней линии трапеции.

Краткая запись доказательства теоремы на доске и в тетрадях учащихся (рис. 99):

Дано: $ABCD$ – трапеция, BC и AD – основания, MN – средняя линия.

Доказать: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Доказательство:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \quad (1), \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \quad (2).$$

$$(1) + (2) = 2 \cdot \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}) = \\ = \vec{0} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \vec{0} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

$$\text{Так как } \overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AD}, \text{ то } |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AD}| = BC + AD \Rightarrow \\ MN = \frac{1}{2}(BC + AD).$$

$$\text{Т. к. } \overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}), \text{ то } \overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AD}, \text{ т. е. } MN \uparrow \uparrow BC, MN \uparrow \uparrow AD$$

IV. Закрепление изученного материала

1. Разобрать решение задачи № 136 (рабочая тетрадь, с. 63).

Задача № 136

Дано: Прямая OT параллельна основанию CD трапеции $ABCD$ (рис. 100), причем $AO = OD$.

Докажите, что отрезок OT – средняя линия трапеции.

Доказательство:

В соответствии с определением средней линии трапеции нужно доказать, что точка T является серединой стороны BC .

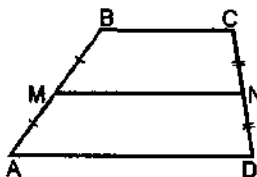


Рис. 98

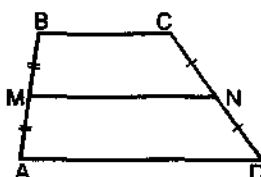


Рис. 99

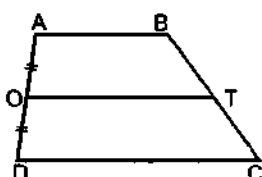


Рис. 100

Предположим, что это не так, и пусть серединой стороны BC является точка X . Тогда отрезок OX – средняя линия трапеции, поэтому $OX \parallel CD$. Но по условию задачи $OT \parallel CD$.

Итак, через точку O проходят две прямые, параллельные прямой CD , что противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, точка T – середина стороны BC , т. е. отрезок OT – средняя линия трапеции, что и требовалось доказать.

2. Самостоятельно решить задачу № 135 из рабочей тетради.

Задача № 135

Дано: В трапеции $ABCD$, изображенной на рис. 101, $AK = KB$, $CM = MD$, $BP = PK$, $CT = TM$, $BC = 2$ м, $AD = 8$ м.

Найти: PT .

Решение: Т. к. $AK = KB$ и $CM = MD$, то отрезок KM – средняя линия трапеции, следовательно, $KM \parallel BC$ и

$$KM = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(2 + 8) = 5 \text{ (м)}.$$

В четырехугольнике $BCMK$ стороны BC и KM параллельны, а стороны BK и CM не параллельны, следовательно, $BCMK$ – трапеция. По условию задачи $BP = PK$ и $CT = TM$, поэтому отрезок PT – средняя линия трапеции $BCMK$, и, следовательно,

$$PT = \frac{1}{2}(BC + KM) = \frac{1}{2}(2 + 5) = 3,5 \text{ (м)}.$$

Ответ: 3,5 м.

3. Самостоятельно решить задачи № 794, 796, 797.

Задача № 794

Решение (рис. 102):

- 1) Так как $KM = MA$, $MN \parallel KP$, то MN – средняя линия $\triangle AKP$ и $MN = \frac{1}{2}KP \Rightarrow KP = 2 \cdot 3,4 = 6,8$.
- 2) В треугольнике ABC $KP \parallel BC$, $BK = KA \Rightarrow KP$ – средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow BC = 2 \cdot KP = 2 \cdot 6,8 = 13,6$.
- 3) В четырехугольнике $BKPC$ $BC \parallel KP$, $BK \parallel PC \Rightarrow BKPC$ – трапеция, $FE = \frac{1}{2}(KP + BC) = \frac{1}{2}(6,8 + 13,6) = 10,2$.

Ответ: 6,8; 10,2.

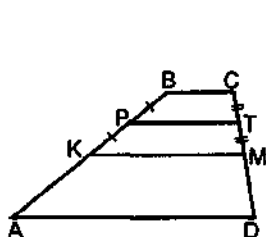


Рис 101

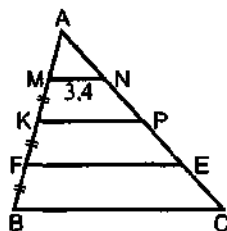


Рис 102

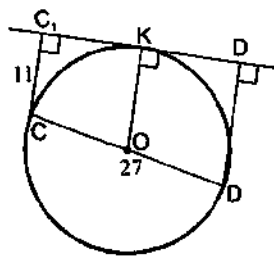


Рис 103

Задача № 796**Решение** (рис. 103):

C_1D_1 – касательная к окружности, следовательно $OK \perp C_1D_1$.
 Т. к. $CC_1 \perp C_1D_1$, $DD_1 \perp CD_1$ по условию, то $CC_1 \parallel DD_1 \parallel OK$.
 O – середина $CD \Rightarrow OK$ – средняя линия трапеции CC_1D_1D . OK – радиус окружности, $\Rightarrow OK = 1/2 CD = 27 \cdot 1/2 = 13,5$ (см).

Так как OK – средняя линия трапеции CC_1D_1D , то:

$$OK = 1/2(CC_1 + D_1D) \Rightarrow 1/2 DD_1 = OK - 1/2 CC_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DD_1 = 2 \cdot OK - CC_1 = 2 \cdot 13,5 - 11 = 16 \text{ (см)}.$$

Ответ: 16 см.**Задача № 797****Решение** (рис. 104):

Так как EM – средняя линия трапеции, то $EM \parallel BC \parallel AD$. $AE = EB$, $EK \parallel BC \Rightarrow$ по теореме Фалеса $AK = KC$, т. е. K – середина диагонали AC .

$DM = MC$, $MN \parallel BC \Rightarrow$ по теореме Фалеса $DN = NB$, т. е. N – середина диагонали BD .

Так как N и K – середины диагоналей трапеции и K и N лежат на EM , то средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

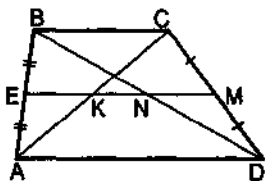


Рис 104

Дополнительные задачи

1. В трапеции $ABCD$ угол A прямой, угол C равен 135° , $AB = 5$ см, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, AD и BC – основания трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.
 (Ответ: 7,5 см.)

2. В равнобедренной трапеции один из углов равен 120° , боковая сторона равна 8 см, а меньшее основание 6 см. Найдите среднюю линию трапеции.

(Ответ: 10 см.)

Домашнее задание

I уровень – решить задачу № 137 (из рабочей тетради) и задачи № 793, 795, 798.

II уровень – решить задачи № 793, 795, 798 и дополнительную задачу.

Дополнительная задача

В равнобедренной трапеции диагональ составляет с основанием угол в 30° , а ее высота равна 4 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение (рис. 105):

- 1) Проведем высоту трапеции BH , тогда в треугольнике BDH $\angle H = 90^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, $BH = 4$ см $\Rightarrow BD = 2 \cdot BH = 8$ (см). По теореме Пифагора $DH^2 = BD^2 - BH^2 = 64 - 16 = 48$, $BC = 4\sqrt{3}$ см.

- 2) Проведем высоту CK , тогда:

$$HK = DH - KD = 4\sqrt{3} - KD \text{ (см)} \Rightarrow$$

$BC = HK = 4\sqrt{3} - KD$ (см). Так как $ABCD$ – равнобедренная трапеция, то $AH = KD$ и $AD = AH + HD = KD + 4\sqrt{3}$.

- 3) Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, т. е.:

$$\frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}((4\sqrt{3} - KD) + (KD + 4\sqrt{3})) = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

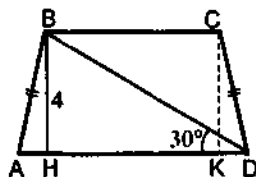


Рис 105

Урок 13

Решение задач по теме «Векторы»

Цели урока:

- Систематизировать ЗУН учащихся по изучаемой теме.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение теории векторов.
- Подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Теоретический тест с последующей самопроверкой

Учащиеся решают задания в тет. рядах, ответы выписывают на листочки и сдают на проверку учителю, правильность своих ответов проверяют по тетрадам.

I вариант

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

- Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными, если ...
- $\vec{m} = \vec{n}$, если ...
- Векторы $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ противоположно направлены, если ...
- Если $ABCD$ – параллелограмм, то $\vec{AB} + \vec{AD} = \dots$

2. Установите истинность утверждений:

- Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$.
- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

в) Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они одинаково направлены.

– Выберите верный ответ из предложенных:

3. $ABCD$ – квадрат (рис. 106). $AB = 5$.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ равен:

- а) 10;
- б) $5\sqrt{5}$;
- в) $\sqrt{10}$.

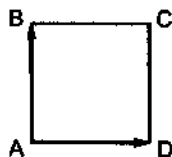


Рис. 106

4. Упростите выражение: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{QM} - \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{CF}$

- а) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{MN}$;
- б) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{MN}$;
- в) $\overrightarrow{MN}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Выразить через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ вектор $\overrightarrow{OA}$.

- а) $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;
- б) $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;
- в) $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

II вариант

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

- а) Ненулевые векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ называются противоположно направленными, если ...
- б) $\vec{a} = -\vec{b}$, если ...
- в) Векторы $\vec{c}$ и $k \cdot \vec{c}$ сонаправлены, если ...
- г) Если $ABCD$ – ромб, то $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \dots$

2. Установите истинность утверждений:

- а) Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, что $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.
- б) Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее противоположных сторон.
- в) От любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

– Выберите верный ответ из предложенных:

3. $ABCD$ – квадрат (рис. 107). $AB = 4$.

$|\vec{BA} + \vec{BC}|$ равен:

- а) 8;
б) $4\sqrt{2}$;
в) $\sqrt{8}$.

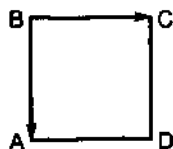


Рис. 107

4. Упростите выражение: $\vec{PB} - \vec{OD} + \vec{MC} - \vec{PA} + \vec{BM} + \vec{OA}$

- а) $\vec{DA} + \vec{CA}$;
б) $\vec{AD} + \vec{AC}$;
в) $\vec{DC}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Выразить через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$ вектор $\vec{OD}$.

- а) $\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;
б) $\vec{OD} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;
в) $\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

Ключи к тесту

I вариант

1. а) ... если они коллинеарны и одинаково направлены.
б) ... если $\vec{m} \uparrow \vec{n}$ и $|\vec{m}| = |\vec{n}|$.
в) ... если $k < 0$.
г) ... если $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.
2. а) ложное;
б) истинное;
в) ложное.
3. б); 4. а); 5. б).

II вариант

1. а) ... если они коллинеарны и направлены противоположно.
б) ... если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
в) ... если $k > 0$.
г) ... если $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$.
2. а) ложное;
б) ложное;
в) истинное.
3. а); 4. в); 5. б).

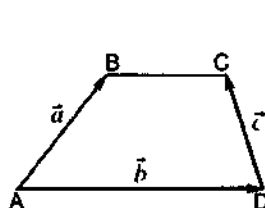


Рис 108

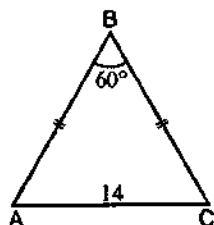


Рис 109

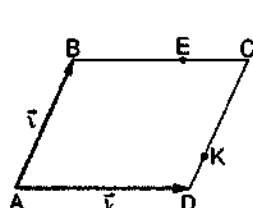


Рис 110

III. Актуализация знаний учащихся

Решение задач на готовых чертежах (устно, один из учащихся рассказывает свое решение, остальные слушают).

1. Рис. 108. Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
2. Рис. 109. Найти: $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$; $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$.
3. Рис. 110. $ABCD$ – параллелограмм.
 $BE : EC = 3 : 2$; $DK : KC = 1 : 4$.
 Выразить через $\vec{x}$ и $\vec{y}$ $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{EK}$.
4. Рис. 111. Найти: среднюю линию трапеции $ABCD$.
5. Рис. 112. Найти: среднюю линию трапеции $ABCD$.
6. Рис. 113. $ABCD$ – трапеция.
 Найти среднюю линию.

Ответы к задачам:

1. $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$;
2. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = 14$; $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = 28$;
3. $\overrightarrow{AE} = \vec{x} + \frac{3}{5}\vec{y}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\vec{x} + \vec{y}$; $\overrightarrow{DE} = \vec{x} - \frac{2}{5}\vec{y}$; $\overrightarrow{BK} = \vec{y} - \frac{4}{5}\vec{x}$;
 $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{5}\vec{y} - \frac{4}{5}\vec{x}$.
4. 5,5.
5. $6 + 6\sqrt{3}$.
6. $7 + 3\sqrt{3}$.

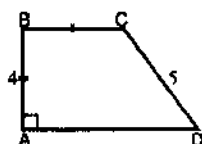


Рис 111

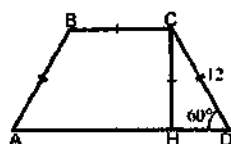


Рис 112

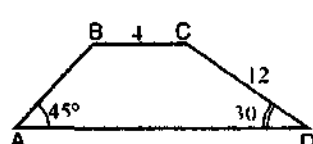


Рис 113

IV. Самостоятельное решение задач

I уровень

1. В трапеции $ABCD$ $AB = CD$, высота BH делит основание на два отрезка, меньший из которых равен 5 см. Найдите AD , если ее средняя линия равна 9 см.
2. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.
3. Точки P и E лежат соответственно на сторонах BC и DC параллелограмма $ABCD$ так, что $BP = PC$ и $DE : EC = 1 : 2$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AD}$ векторы $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{PE}$.
4. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона равна 12 см, а большая составляет с большим основанием угол 45° . Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 20 см.
5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle A = \angle D = 45^\circ$, $BC = 4$ см, а высота трапеции равна 3 см. Найдите среднюю линию трапеции.
6. В трапеции $MHKP$ $\angle M = 90^\circ$, $\angle K = 150^\circ$, $HK = 2$ см, диагональ MK перпендикулярна боковой стороне KP . Найдите среднюю линию трапеции.
7. Дан треугольник ABC . Постройте вектор:
 - а) $-3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$;
 - б) $-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$.
8. Из условия $\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{OD} + \vec{x} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AO}$ найдите вектор $\vec{x}$.
9. Из условия $\vec{m} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{KP}$ найдите длину вектора $\vec{m}$.

II уровень

1. Точки A и B лежат соответственно на сторонах NK и KP трапеции $MNKP$ так, что $NA = AK$, $2KB = BP$. Выразите векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{MP}$, если известно, что основание NK равно половине MP .

- Точки P и E – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AP}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AE}$.
- В равнобедренной трапеции диагональ, равная 10 см, составляет с основанием угол в 45° . Найдите среднюю линию трапеции.
- В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 15 см, а ее средняя линия 12 см. Найдите периметр трапеции.
- Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, где AA_1 , BB_1 , CC_1 – медианы треугольника ABC .
- Докажите, что если для четырехугольника $ABCD$ и произвольной точки O выполняется равенство $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, то этот четырехугольник – параллелограмм.
- Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O , точка E лежит на стороне CD так, что $DE : EC = 2 : 5$. Выразите вектор $\overrightarrow{OE}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$.
- В треугольнике ABC $AB = 15$ см, $BC = 17$ см, $AC = 8$ см. Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдите $|\overrightarrow{BK}|$.
- На окружности с центром O постройте такие точки a, b, c , что:
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$;
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$;
 - $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить оставшиеся задачи для самостоятельного решения.

Урок 14

Контрольная работа по теме «Векторы»

I уровень

I вариант

- Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $2\vec{b} - \vec{a}$.
- На стороне BC ромба $ABCD$ лежит точка K так, что $BK = KC$, O – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

3. В равнобедренной трапеции высота делит большее основание на отрезки, равные 5 и 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.
- 4*. В треугольнике ABC O – точка пересечения медиан. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

II вариант

1. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{3}\vec{m} + 2\vec{n}$; б) $3\vec{n} - \vec{m}$.
2. На стороне CD квадрата $ABCD$ лежит точка P так, что $CP = PD$, O – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PA}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$.
3. В равнобедренной трапеции один из углов равен 60° , боковая сторона равна 8 см, а меньшее основание 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.
- 4*. В треугольнике MNK O – точка пересечения медиан, $\overrightarrow{MN} = \vec{x}$; $\overrightarrow{MK} = \vec{y}$, $\overrightarrow{MO} = k \cdot (\vec{x} + \vec{y})$. Найдите число k .

II уровень**I вариант**

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; б) $-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + 0,5\vec{c}$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K и E так, что $BK = KC$, $CE : ED = 2 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.
3. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, боковые стороны равны 10 и 12 см, а меньшее основание 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.
- 4*. В треугольнике ABC B_1 – середина AC , точка A_1 лежит на стороне BC так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 2$. Используя векторы, докажите, что середина BB_1 лежит на прямой AA_1 .

II вариант

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Постройте векторы, равные: а) $\frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{4}\vec{x}$; б) $0,2\vec{z} - \vec{y} + \frac{3}{5}\vec{x}$.
2. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $AM = MB$, $AN : ND = 3 : 4$. Выразите векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{CB}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{CD}$.

3. В трапеции $MNKP$ $\angle M = 45^\circ$, $\angle P = 30^\circ$, боковые стороны равны 8 см и 10 см, а меньшее основание 5 см. Найдите среднюю линию трапеции.
- 4*. В трапеции $ABCD$ $BC : AD = 1 : 2$, E – середина боковой стороны CB , точка M лежит на AE так, что $AM : ME = 4 : 1$. Используя векторы, докажите, что точка M лежит на диагонали BD .

III уровень

I вариант

1. $ABCD$ и $ADEF$ – параллелограммы, имеющие общую сторону. Постройте вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CD} + \vec{AF} + \vec{x} = \vec{DE}$.
2. На стороне CD и диагонали AC параллелограмма $ABCD$ лежат точки P и E так, что $DP : PC = 3 : 2$, $AE : EC = 4 : 3$. Выразите вектор $\vec{EP}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$.
3. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно меньшей боковой стороне, один из углов 45° , а средняя линия 10 см. Найдите периметр трапеции.
- 4*. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $3 : 1$, E – середина стороны AB . Докажите, что $DE < 2/3 DA + 1/2 DC$.

II вариант

1. $ABCD$ и $CFED$ – параллелограммы, имеющие общую сторону. Постройте вектор $\vec{y}$ такой, что $\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{ED} + \vec{CD} + \vec{y} = \vec{AD}$.
2. На стороне AB и диагонали BD параллелограмма $ABCD$ лежат точки N и M так, что $AN : NB = 3 : 2$, $BM : MD = 5 : 2$. Выразите вектор $\vec{MN}$ через векторы $\vec{x} = \vec{CB}$ и $\vec{y} = \vec{CD}$.
3. В прямоугольной трапеции меньшее основание в два раза меньше меньшей боковой стороны, один из углов 135° , а средняя линия 14 см. Найдите периметр трапеции.
- 4*. В параллелограмме $ABCD$ точка P – середина отрезка CD , M – середина стороны BC , отрезки BD и AM пересекаются в точке O . Докажите, что $OP < 2/3 AD + 1/6 AB$.

Ответы к задачам контрольной работы

I уровень

I вариант

2. $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\vec{KD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.
3. 12 см.
4. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

II вариант

$$2. \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}), \quad \overrightarrow{BP} = \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{x}; \quad \overrightarrow{AP} = \vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}.$$

$$3. 11 \text{ см.}$$

$$4. k = \frac{1}{3}.$$

II уровень**I вариант**

$$2. \overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{a}; \quad \overrightarrow{KE} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}.$$

$$3. 10,5 + 3\sqrt{2} \text{ см.}$$

II вариант

$$2. \overrightarrow{CM} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}, \quad \overrightarrow{CN} = \vec{y} + \frac{4}{7}\vec{x}; \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{3}{7}\vec{x}.$$

$$3. 5 + 2\sqrt{2} + 2,5\sqrt{3} \text{ см.}$$

III уровень**I вариант**

$$1. \vec{x} = \overrightarrow{DA}.$$

$$2. \overrightarrow{EP} = \frac{1}{35}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}.$$

$$3. \frac{20}{3}(4 + \sqrt{2}) \text{ см.}$$

II вариант

$$1. \vec{y} = \overrightarrow{ED}.$$

$$2. \overrightarrow{MN} = \frac{7}{5}\vec{x} - \vec{y}.$$

$$3. 7(6 + \sqrt{2}) \text{ см.}$$

МЕТОД КООРДИНАТ

В курсе математики 6 класса вводится понятие координат точки в прямоугольной системе координат. Далее, начиная с 7 класса, в курсе алгебры идет расширение знаний, умений, навыков по решению задач по данной теме: построение графиков различных функций по заданному уравнению. Поэтому при изучении метода координат целесообразно опираться на знания, умения и навыки учащихся, приобретенные на предыдущих этапах обучения.

Основная цель данной главы – расширение и углубление знаний учащихся применять алгебраический аппарат при решении геометрических задач, совершенствование навыков решения геометрических задач методом координат.

В ходе изучения данной главы учащиеся должны научиться выполнять действия над векторами, заданных своими координатами, находить координаты, абсолютную величину вектора, вычислять координаты середины отрезка, уметь использовать уравнения окружности и прямой при решении задач.

Урок 15

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Цели урока:

- Рассмотреть лемму о коллинеарных векторах.
- Доказать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.
- Научить учащихся решать задачи на применение теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Анализ ошибок контрольной работы

III. Актуализация знаний учащихся

Решение задач по готовым чертежам (устно).

1. Рис. 114. $ABCD$ – параллелограмм. *Выразите:*

а) $\overrightarrow{AO}$ через $\overrightarrow{AC}$;

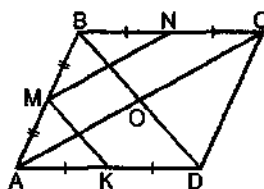


Рис. 114

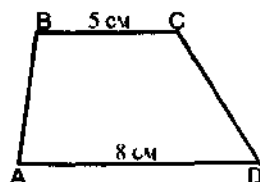


Рис. 115

б) $\overline{MN}$ через $\overline{AC}$; $\overline{OC}$;

в) $\overline{MK}$ через $\overline{DB}$; $\overline{OD}$;

г) $\overline{MN}$ через $\overline{AB}$; $\overline{AD}$.

2. Рис. 115. Выразите, если возможно:

а) $\overline{BC}$ через $\overline{AD}$; $\overline{DA}$;

б) $\overline{AB}$ через $\overline{CD}$; $\overline{AD}$;

в) $\overline{AC}$ через $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

III. Изучение нового материала

Решить задачу в группах: «Всегда ли можно выразить один вектор через другой?»

Обсуждение решения задачи.

Рассмотреть два случая: а) векторы коллинеарны и ненулевые; б) векторы неколлинеарны.

Сформулировать лемму о коллинеарных векторах, доказательство предложить прочитать дома.

Ввести понятие разложения одного вектора по двум неколлинеарным векторам:

$\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где x, y — коэффициенты разложения.

Сформулировать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. (Доказательство провести самому учителю, используя п. 86 учебника.)

IV. Закрепление изученного материала

Решение задач из рабочей тетради.

Задача № 1 (решить устно)

Найдите такое число q , чтобы выполнялось равенство $\vec{m} = q\vec{n}$, если:

а) $\vec{m} \uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см;

б) $\vec{m} \updownarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 0,7$ м, $|\vec{n}| = 2$ м.

Решение:

а) По условию $\vec{m} \uparrow \vec{n}$, т.е. $q > 0$, $|q| = \frac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} = 2,5$, $q = 2,5$.

б) По условию $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}$, т.е. $q < 0$, $|q| = \frac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|}$, $q = -0,35$.

Ответ: а) 2,5; б) -0,35.

Задача № 2

(Разобрать письменно.)

Дано: диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M , точка H – середина отрезка AM .

Найдите, если это возможно, такое число k , чтобы выполнялось равенство: а) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{MH} = k\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{AC}$.

Решение (рис. 116):

а) $\overrightarrow{AM} \uparrow \overrightarrow{AC}$, поэтому искомое число k существует, $|k| = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AC}|}$ и $k > 0$. Так как диагонали параллелограмма точкой M делятся пополам, то $|k| = \frac{1}{2}$. Итак, $k = \frac{1}{2}$.

б) $\overrightarrow{MH} \uparrow \overrightarrow{AC}$, поэтому искомое число k отрицательно, $|k| = \frac{|\overrightarrow{MH}|}{|\overrightarrow{AC}|}$ и $k < 0$. По условию задачи точка H – середина отрезка AM , тогда, $MH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}(AC : 2) = \frac{1}{4}AC$, поэтому $|k| = \frac{1}{4}$. Итак, $k = -\frac{1}{4}$.

в) Векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, поэтому искомого значения k не существует.

Ответ: а) $k = \frac{1}{2}$; б) $k = -\frac{1}{4}$; в) не существует.

Задача № 3

(Решить самостоятельно.)

Дано: в параллелограмме $ABCD$, изображенном на рис. 117, $MK \parallel DC$ и $PT \parallel DA$.

1) Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{DT}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$ векторы: а) $\overrightarrow{DO}$; б) $\overrightarrow{DB}$.

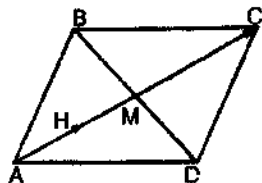


Рис. 116

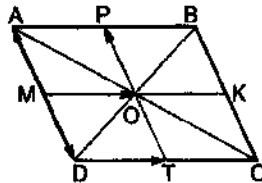


Рис. 117

- 2) Разложите вектор $\overrightarrow{OB}$ по векторам: а) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$;
 б) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AD}$.

Решение:

- 1) По условию задачи $MK \parallel DC$, поэтому $\angle BOK = \angle BDC$. В треугольниках BOK и BDC угол B общий, $\angle BOK = \angle BDC$, следовательно, $\triangle BOK \sim \triangle BDC$. Так как $BO = \frac{1}{2}BD$, то $BK = \frac{1}{2}BC$, следовательно, точка K – середина стороны BC параллелограмма. Аналогично точки M , P и T – середины сторон данного параллелограмма.

- а) По правилу параллелограмма получаем: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{DM}$,
 но $\overrightarrow{DT} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\vec{b}$. Итак, $\overrightarrow{DO} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

б) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{DA} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

- 2) а) По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = \vec{m} + \vec{c}$.

б) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MO} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AD} = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$.

Ответ:

1) а) $\overrightarrow{DO} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\overrightarrow{DB} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

2) а) $\overrightarrow{OB} = \vec{m} + \vec{c}$; б) $\overrightarrow{OB} = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$.

Решить самостоятельно задачи № 912, 914 (а).

Дополнительные задачи

- В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O . Через точку O проведена прямая, параллельная AB и пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите, если возможно, такое число k , что:
 - $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{BA}$;
 - $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{NM}$;
 - $\overrightarrow{CO} = k \cdot \overrightarrow{CC_1}$, где CC_1 – медиана;
 - $\overrightarrow{OC_1} = k \cdot \overrightarrow{OC}$.
- В параллелограмме $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей, точка E лежит на стороне BC так, что $BE : EC = 2 : 3$. Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ векторы: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CE}$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 86; вопросы 1–3.

Решить задачу № 4 из рабочей тетради, задачи № 911, 914 (б, в), 915 – из учебника.

Урок 16

Координаты вектора

Цели урока:

- Ввести понятие координат вектора, координат разности и суммы двух векторов.
- Научиться решать простейшие задачи методом координат.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Теоретический опрос**

1. Доказать лемму о коллинеарных векторах.
2. Доказать теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

III. Проверка домашнего задания

Проверка домашней задачи № 4 из рабочей тетради – устно; решение задачи № 915 подготовить на доске.

Задача № 4

Дано: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Найдите числа x и y такие, что:

а) $2\vec{a} + x\vec{b} = y\vec{a} - \vec{b}$;

б) $x\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{a} + 4\vec{b} = \vec{0}$;

в) $4x\vec{a} - \vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$.

Решение:

- а) В левой и правой частях данного равенства записаны разложения некоторого вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку такое разложение единственно, то коэффициенты перед вектором $\vec{a}$ равны, следовательно, $y = 2$. Аналогично $x = -1$.
- б) Запишем данное равенство в виде $(x-3)\vec{a} + (1+4y)\vec{b} = 0\vec{a} + 0\vec{b}$. Так как разложение вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единственно, то $x-3 = 0$ и $1+4y = 0$. Отсюда получаем: $x = 3$, $y = -1/4$.
- в) В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам получаем: $4x - 1 = 0$ и $y = 0$.

Следовательно, $x = \frac{1}{4}, y = 0$.

Ответ: а) $x = -1, y = 2$; б) $x = 3, y = -\frac{1}{4}$; в) $x = \frac{1}{4}, y = 0$.

Задача № 915

Решение (рис. 118):

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Так как $AM : MC = 4 : 1$, то $AM = \frac{4}{5}AC$, следовательно,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{5}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$.

IV. Самостоятельное решение задач

I уровень – № 916 учебника.

II уровень – решить дополнительные задачи.

Задача 1

В треугольнике MNK точка A лежит на стороне NK так, что $\frac{NA}{AK} = \frac{3}{7}$. Разложите вектор $\overrightarrow{MA}$ по векторам $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{MK}$.

Задача 2

В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC так, что $BM : MA = 4 : 1$ и $BN : NC = 4 : 1$. Используя векторы, докажите, что $MN \parallel AC$.

III. Изучение нового материала

1. Повторить прямоугольную систему координат.

Оси Ox и Oy взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O (начало координат). Единичный отрезок оси выбирается, исходя из конкретных условий.

2. Ввести понятие координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (см. рис. 119)

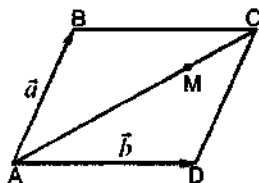


Рис. 118

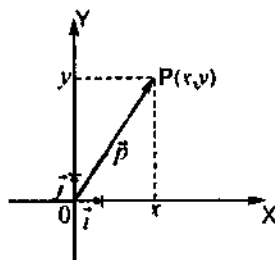


Рис. 119

$\vec{i} \uparrow \uparrow Ox, |\vec{i}|=1; \vec{j} \uparrow \uparrow Oy, |\vec{j}|=1. \vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы.

3. Ввести понятие координат вектора.

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны, значит, любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

(Числа x и y для данного вектора определяются единственным образом.)

$\vec{p}\{x; y\}$, где x, y – координаты вектора $\vec{p}$.

Примеры:

Рис. 120.

$$\vec{OA} = 4\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow \vec{OA}\{4; 5\},$$

$$\vec{OB} = -6\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{OB}\{-6; 2\},$$

$$\vec{c} = 5\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow \vec{c}\{5; -3\},$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{0}\{0; 0\}.$$

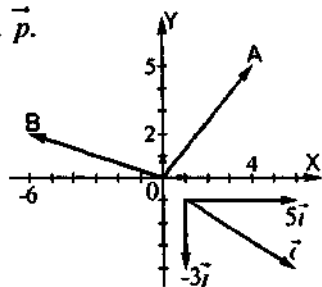


Рис. 120

4. Координаты равных векторов.

Если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, то $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Координаты равных векторов соответственно равны.

5. Координаты суммы векторов.

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

Доказательство:

$$\vec{a}\{x_1; y_1\} \Rightarrow \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j},$$

$$\vec{b}\{x_2; y_2\} \Rightarrow \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = \vec{i}(x_1 + x_2) + \vec{j}(y_1 + y_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}. \end{aligned}$$

6. Координаты разности двух векторов.

Задание учащимся:

Докажите, если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{c}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

Дать 2–3 минуты на обдумывание, одного из учащихся попросить выполнить задание на переносной доске, а затем заслушать всем классом его решение и обсудить правильность решения.

7. Координаты произведения вектора на число.

Докажите, что если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, k – произвольное число, $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$, то $\vec{c}\{kx_1; ky_1\}$.

Проводится работа, аналогичная п. 6.

VI. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях № 5 – устно, № 8 – самостоятельно с последующим обсуждением.

Задача № 5

- Какой из данных на рис. 121 векторов равен вектору $4\vec{i} - 2\vec{j}$?
- Напишите разложение вектора $\vec{OE}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- Найдите координаты $\vec{OA}$.
- Напишите, какой вектор имеет координаты $\{-4; 2\}$.
- Отложите от точки O вектор с координатами $\{2; -4\}$.

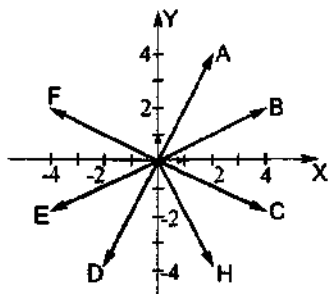


Рис. 121

Ответ: а) $\vec{OC}$; б) $\vec{OE} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$; в) $\vec{OA} \{2; 4\}$; г) $\vec{OK}$.

Задача № 8

Даны векторы $\vec{a} \{2; -3\}$ и $\vec{b} \{-1; 5\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{n} = 4\vec{a}$;

в) $\vec{k} = -\vec{b}$; г) $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение: Используя утверждения о координатах суммы векторов и произведения вектора на число, получаем:

а) $\vec{m} \{2 + (-1); -3 + 5\}$, т. е. $\vec{m} \{1; 2\}$;

б) $\vec{n} \{4 \cdot 2; 4 \cdot (-3)\}$, т. е. $\vec{n} \{8; -12\}$;

в) $\vec{k} \{-(-1); -5\}$, т. е. $\vec{k} \{1; 5\}$;

г) Обозначим через x_1 и y_1 абсциссу и ординату вектора $\vec{a}$, через x_2 и y_2 – абсциссу и ординату вектора $\vec{b}$, буквами x и y – абсциссу и ординату вектора $\vec{p}$.

Тогда $x = 4x_1 - 3x_2 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 11$,

$y = 4y_1 - 3y_2 = 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 5 = -27$.

Следовательно, $\vec{p} \{11; -27\}$.

Ответ:

а) $\vec{m} \{1; 2\}$;

б) $\vec{n} \{8; -12\}$;

в) $\vec{k} \{1; 5\}$;

г) $\vec{p} \{11; -27\}$.

2. Самостоятельное решение задач № 917, 920, 921, 926 (а, в).

Задача № 926

а) Дано: $\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{a} \{2; -5\}$; $\vec{b} \{-5; 2\}$.

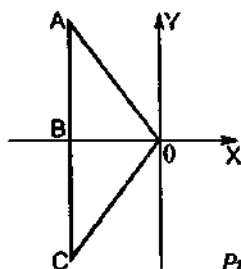


Рис 122

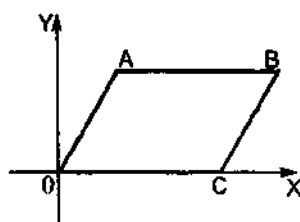


Рис 123

Найти: координаты вектора $\vec{v}$.

Решение:

$$\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{v}\{3 \cdot 2 - 3 \cdot (-5); 3 \cdot (-5) - 3 \cdot 2\} = \vec{v}\{21; -21\}.$$

в) Дано: $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{a}\{-7; -1\}$; $\vec{b}\{-1; 7\}$; $\vec{c}\{4; -6\}$.

Найти: координаты вектора $\vec{v}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \vec{v}\left[3 \cdot (-7) - 2 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 4; 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot (-6)\right] = \\ &= \vec{v}\{-21; -14\}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $\vec{v}\{21; -21\}$; б) $\vec{v}\{-21; -14\}$.

Дополнительные задачи

- Даны векторы $\vec{a}\{2; -4\}$ и $\vec{b}\{-5; 3\}$. Разложите по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\vec{m} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.
- Рис. 122. Дано: $OA = OC = 10$, $OB = 6$, $AC \parallel OY$.
Найдите: координаты векторов $\vec{OA}$, $\vec{OC}$, $\vec{AC}$.
- Рис. 123. Дано: $OACB$ – параллелограмм, $OA = 6$, $OC = 8$, $\angle AOC = 60^\circ$. Разложите векторы $\vec{OA}$, $\vec{OC}$, $\vec{OB}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Домашнее задание

П. 87, вопросы 7–8.

I уровень: решить задачи № 6, № 7 из рабочей тетради, № 918, № 919, 926 (б, г).

II уровень: решить задачи № 918, 919, 926 (б, г), 927, 928.

Урок 17

Простейшие задачи в координатах

Цели урока:

- Совершенствование навыков решения задач методом координат.

- Рассмотреть простейшие задачи в координатах и показать их применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания (проверить решение задач № 927, № 928).

Устное решение задач № 924, 925, 922, 923.

III. Самостоятельная работа проверочного характера

I уровень

I вариант

1. Даны векторы $\vec{a}\{2; 4\}$ и $\vec{b}\{-3; 2\}$. Найдите координаты векторов:

а) $\vec{m} = 3\vec{a}$;

б) $\vec{n} = -\vec{b}$;

в) $\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$;

г) $\vec{l} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$.

2. Среди векторов $\vec{a}\{-1; 3\}$, $\vec{b}\{2; 6\}$, $\vec{c}\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$, $\vec{d}\{-\frac{1}{3}; -1\}$ укажите пары коллинеарных.

II вариант

1. Даны векторы $\vec{x}\{6; 3\}$ и $\vec{y}\{-2; 1\}$. Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{x}$;

б) $\vec{b} = -\vec{y}$;

в) $\vec{c} = \vec{x} + 2\vec{y}$;

г) $\vec{d} = 2\vec{x} - 3\vec{y}$.

2. Среди векторов $\vec{a}\{2; 5\}$, $\vec{b}\{-4; 10\}$, $\vec{c}\{-1; -2,5\}$, $\vec{d}\{0,4; -1\}$ укажите пары коллинеарных.

II уровень

I вариант

1. Даны векторы $\vec{a}\{1; -2\}$, $\vec{b}\{-3; 2\}$ и $\vec{c}\{-2; -3\}$.

а) Найдите координаты вектора $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$;

б) Запишите разложение вектора $\vec{x}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$;

- в) Найдите координаты вектора $\vec{y}$, противоположного вектору $\vec{x}$.
2. Среди векторов $\vec{a}\left\{-5\frac{1}{3}; 0\right\}$, $\vec{b}\left\{0; 10\frac{2}{3}\right\}$, $\vec{c}\left\{2\frac{2}{3}; 0\right\}$, $\vec{d}\left\{0; -5\frac{1}{3}\right\}$, $\vec{e}\left\{2\frac{2}{3}; -5\frac{1}{3}\right\}$ найдите пары неколлинеарных векторов.

II вариант

1. Даны векторы $\vec{m}\{2; -1\}$; $\vec{n}\{-3; 4\}$ и $\vec{k}\{-1; -5\}$.
- а) Найдите координаты вектора $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{k}$;
- б) Запишите разложение вектора $\vec{a}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$;
- в) Найдите координаты вектора $\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{a}$.
2. Среди векторов $\vec{m}\left\{7\frac{1}{5}; 0\right\}$, $\vec{n}\left\{-1\frac{3}{5}; 0\right\}$, $\vec{k}\left\{0; -3\frac{3}{5}\right\}$, $\vec{l}\left\{1\frac{3}{5}; 3\frac{3}{5}\right\}$, $\vec{p}\left\{0; 1\frac{4}{5}\right\}$ найдите пары неколлинеарных векторов.

III уровень**I вариант**

В параллелограмме $ABCD$ $\vec{AB}\{2; 5\}$, $\vec{AD}\{3; -4\}$; точки M и N лежат на сторонах BC и CD соответственно так, что $BM = MC$, $CN : ND = 3 : 1$.

- а) Найдите координаты вектора $\vec{MN}$.
- б) Запишите разложение вектора $\vec{MN}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- в) Найдите длину вектора $\vec{AC}$.

II вариант

В параллелограмме $ABCD$ $\vec{CB}\{3; 4\}$, $\vec{CD}\{4; -2\}$; точки K и P лежат на сторонах AB и AD соответственно так, что $AK : KB = 2 : 1$, $AD = PD$.

- а) Найдите координаты вектора $\vec{KP}$.
- б) Запишите разложение вектора $\vec{KP}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
- в) Найдите длину вектора $\vec{CA}$.

Ответы к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. а) $\vec{m} \{6; 12\}$;

б) $\vec{n} \{3; -2\}$;

в) $\vec{k} \{-5; 6\}$;

г) $\vec{l} \{18; 4\}$.

2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$; $\vec{b}$ и $\vec{d}$.

II вариант

1. а) $\vec{a} \{2; 1\}$;

б) $\vec{b} \{2; -1\}$;

в) $\vec{c} \{2; 5\}$;

г) $\vec{d} \{18; 3\}$.

2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$; $\vec{b}$ и $\vec{d}$.

II уровень

I вариант

1. а) $\vec{x} \{9; -13\}$;

б) $\vec{x} = 9\vec{i} - 13\vec{j}$;

в) $\vec{y} \{-9; 13\}$.

2. $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{a}$ и $\vec{d}$; $\vec{a}$ и $\vec{e}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{b}$ и $\vec{e}$; $\vec{c}$ и $\vec{d}$; $\vec{c}$ и $\vec{e}$;

II вариант

1. а) $\vec{a} \{1; 10\}$;

б) $\vec{a} = \vec{i} + 10\vec{j}$;

в) $\vec{b} \{-1; -10\}$.

2. $\vec{m}$ и $\vec{k}$; $\vec{m}$ и $\vec{e}$; $\vec{m}$ и $\vec{p}$; $\vec{n}$ и $\vec{k}$; $\vec{n}$ и $\vec{l}$; $\vec{n}$ и $\vec{p}$; $\vec{k}$ и $\vec{l}$;

III уровень

I вариант

а) $\overrightarrow{MN} \left\{ 0; -6\frac{1}{4} \right\}$;

б) $\overrightarrow{MN} = -6\frac{1}{4}\vec{j}$;

в) $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{26}$.

II вариант

а) $\overrightarrow{KP} \left\{ -\frac{1}{6}; -2\frac{2}{3} \right\}$;

б) $\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{6}\vec{i} - 2\frac{2}{3}\vec{j}$;

в) $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{53}$.

IV. Изучение нового материала

Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца (п. 88)

1. Вывести понятие радиус-вектора.
2. Доказать, что координаты точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.
3. Доказать, что каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Простейшие задачи в координатах (п. 89)

1. Координаты середины отрезка.
2. Вычисление длины вектора по его координатам.
3. Расстояние между двумя точками.

В ходе изложения нового материала рекомендуется использовать таблицу или записать краткий план-конспект на доске и в тетрадях.

а) Рис. 124.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \{x_1; 0\} + \{0; y_1\} = \{x_1; y_1\}, \quad \overrightarrow{OA} \text{ — радиус-вектор точки } A.$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA}\{x_1; y_1\}; \overrightarrow{OB}\{x_2; y_2\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}.$$

б) Рис. 125.

Координаты середины отрезка

C — середина отрезка $AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\{x_1; y_1\} + \{x_2; y_2\}) = \overrightarrow{OC}\left[\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Длина вектора

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{OC_1^2 + C_1C^2}; OC_1 = x; C_1C = OC_2 = y; |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

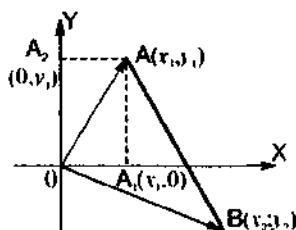


Рис. 124

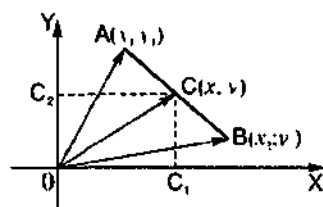


Рис. 125

Расстояние между двумя точками

$$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 9, 10 с последующей проверкой.

Задача № 10

Заполните таблицу:

K	$(5; -2)$	$(-10; 1)$	$(-3; 0)$
M	$(3; 0)$	$(-2; 1)$	$(0; 2)$
$\overrightarrow{KM}$	$\{-2; 2\}$	$\{8; 0\}$	$\{3; 2\}$
$2\overrightarrow{KM}$	$\{-4; 4\}$	$\{16; 0\}$	$\{6; 4\}$
$-0,5\overrightarrow{KM}$	$\{1; -1\}$	$\{-4; 0\}$	$\{-1,5; -1\}$

Задача № 9

Дано: Точка A лежит на положительной полуоси Ox , а точка B – на положительной полуоси Oy ; $OA = 5$, $OB = 12$.

Найдите координаты:

- вершин прямоугольника $OAMB$;
- радиус-векторов точек A , B и M ;
- вектора $\overrightarrow{AB}$;
- векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BC}$, если C – точка пересечения диагоналей прямоугольника $OAMB$.

Решение:

- $O(0; 0)$, $A(5; 0)$, $M(5; 12)$, $B(0; 12)$;
- Радиус-вектором точки A называется вектор, начало которого совпадает с началом координат, а его конец – точка A . Координаты радиус-вектора точки A равны соответствующим координатам точки A . Поэтому $\overrightarrow{OA}\{5; 0\}$, $\overrightarrow{OB}\{0; 12\}$, $\overrightarrow{OM}\{5; 12\}$;
- Каждая координата вектора $\overrightarrow{AB}$ равна разности соответствующих координат его конца (точки B) и начала (точки A). Так как $A(5; 0)$, $B(0; 12)$, то $\overrightarrow{AB}\{-5; 12\}$.
- Точка пересечения диагоналей прямоугольника является серединой диагонали OM , следовательно, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$. Так как $\overrightarrow{OM}\{5; 12\}$, то $\overrightarrow{OC}\{2,5; 6\}$.

Каждая координата вектора $\overline{BC}$ равна разности соответствующих координат его конца (точки C) и начала (точки B). Координаты точки C равны соответствующим координатам ее радиус-вектора $\overline{OC}$, т. е. $C(2,5; 6)$, координаты точки B равны $(0; 12)$, поэтому $\overline{BC} \{2,5; -6\}$.

2. Решить на доске и в тетрадях учащихся № 937, 939, 940 (в, г).

Задача № 937

Так как B – середина AC , то $x_B = \frac{x_A + x_C}{2}$; $y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$. $A(0; 1)$,

$$B(5; -3) \Rightarrow 5 = \frac{0 + x_C}{2}; -3 = \frac{1 + y_C}{2} \Rightarrow x_C = 10; y_C = -7 \Rightarrow C(10; -7).$$

Так как B – середина BC , то $x_D = \frac{x_B + x_C}{2}$; $y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$.

$$B(5; -3), C(10; -7) \Rightarrow x_D = \frac{5 + 10}{2} = 7,5; y_D = \frac{-3 - 7}{2} = -5 \Rightarrow D(7,5; -5).$$

Ответ: $C(10; -7)$, $D(7,5; -5)$.

Задача № 939

а) Расстояние от точки M до оси абсцисс равно модулю ординаты точки M , т. е. 2.

б) Расстояние от точки M до начала координат равно длине радиус-вектора точки M , т. е. $|\overline{OM}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Ответ: а) 2; б) 3; в) $\sqrt{13}$.

VI. Самостоятельное решение задач

I уровень: № 929, 931, 938 (в, г, д);

II уровень: № 938 (в, г, д), дополнительные задачи № 1, № 2.

Задача № 1

Точка M лежит на положительной полуоси Oy , точка K – на положительной полуоси Ox .

а) Найдите координаты вершин трапеции $OMNK$, если $OK = 10$,

$$OM = \frac{1}{2} MN = 4.$$

б) Вычислите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

Решение (см. рис. 126):

а) $OM = 4 \Rightarrow M(0; 4)$, $OK = 10 \Rightarrow K(10; 0)$,

$$\frac{1}{2} MN = 4 \Rightarrow MN = 8 \Rightarrow N(8; 4), O(0; 0).$$

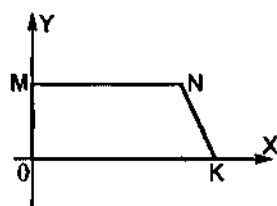


Рис. 126

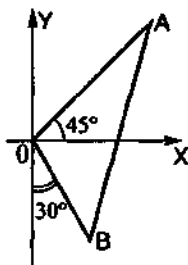


Рис. 127

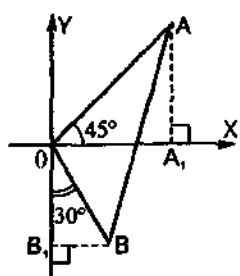


Рис. 128

б) Пусть A – середина диагонали ON , тогда $x_A = \frac{x_O + x_N}{2} = 4$;

$$y_A = \frac{y_O + y_N}{2} = 2 \Rightarrow A(4; 2).$$

Пусть B – середина MK , тогда $x_B = \frac{x_M + x_K}{2} = \frac{0 + 10}{2} = 5$;

$$y_B = \frac{y_M + y_K}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \Rightarrow B(5; 2), AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 4)^2 + (2 - 2)^2} = 1.$$

Ответ: а) $M(0; 4)$, $N(8; 4)$, $K(10; 0)$; б) 1.

Задача № 2

Дано: $OA = 6$, $OB = 4$ (рис. 127).

Найдите:

- координаты точек A и B ;
- длину медианы треугольника OAB , проведенной из вершины O ;
- длину средней линии треугольника OAB , параллельной стороне OA .

Решение (рис. 128):

а) Опустим перпендикуляр из точки A на ось Ox . $\triangle OAA_1$ – прямоугольный, $\angle OAA_1 = 45^\circ$, тогда $\angle AOA_1 = 45^\circ$, $OA_1 = AA_1$, $OA = 6$. По теореме Пифагора: $OA_1^2 + AA_1^2 = OA^2 \Rightarrow 2 OA_1^2 = 36$, $OA_1 = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = 3\sqrt{2} \Rightarrow A(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$.

Опустим перпендикуляр из точки B на ось Oy . $\triangle OBB_1$ – прямоугольный, $OB = 4$, $\angle BOB_1 = 30^\circ$, тогда $BB_1 = 2$,

$$OB_1 = \sqrt{OB^2 - BB_1^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow B(2; 2\sqrt{3}).$$

б) Пусть M – середина AB , тогда $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}$;

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned}
 OM &= \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}+2}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{18+12\sqrt{2}+4}{4} + \frac{18+12\sqrt{6}+12}{4}} = \sqrt{\frac{52+12(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}} = \\
 &= \sqrt{13+3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}.
 \end{aligned}$$

в) Пусть N – середина стороны OB треугольника AOB , тогда

$$x_N = \frac{x_B + x_O}{2} = 1; \quad y_N = \frac{y_B + y_O}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow N(1; \sqrt{3}).$$

MN – средняя линия треугольника, параллельная стороне OA .

$$\begin{aligned}
 MN &= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{3\sqrt{2}+2}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = 3.
 \end{aligned}$$

Ответ: а) $A(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$, $B(2; 2\sqrt{3})$; б) $\sqrt{13+3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$; в) 3.

Задача № 3

Дано: $OA = 10$, $OB = 8$ (рис. 129).

Найдите:

- координаты середины отрезка AB ;
- периметр треугольника MNP , где M, N, P – середины сторон треугольника OAB .

Решение (рис. 130):

а) $\triangle OAA_1$ – прямоугольный ($AA_1 \perp Ox$), $\angle O = 30^\circ \Rightarrow AA_1 = 1/2 OA = 5$, $OA_1 = \sqrt{OA^2 - AA_1^2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow A(5\sqrt{3}; 5)$,

$\triangle OBB_1$ – прямоугольный ($BB_1 \perp Ox$), $\angle O = 30^\circ \Rightarrow BB_1 = 1/2 OB = 4$,

$$OB_1 = \sqrt{OB^2 - BB_1^2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow B(4\sqrt{3}; 4).$$

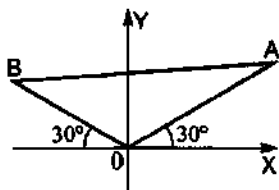


Рис 129

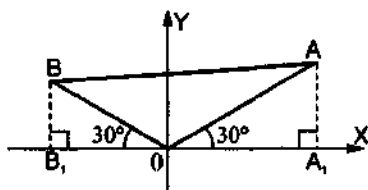


Рис 130

Если C – середина отрезка AB , то $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$; $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

б) Пусть M – середина $AB \Rightarrow M\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Пусть N – середина $OA \Rightarrow N\left(\frac{0+5\sqrt{3}}{2}; \frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Пусть P – середина $OB \Rightarrow P\left(\frac{0+4\sqrt{3}}{2}; \frac{0+4}{2}\right) \Rightarrow P(2\sqrt{3}; 2)$.

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{12 + 4} = 2.$$

$$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4} + \frac{25}{4}} = 10.$$

$$NP = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

$$P_{MNP} = MN + MP + NP = 2 + 10 + 1 = 13.$$

Ответ: а) $\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}\right)$; б) 13.

Задача № 4

Даны точки $A(3; 4)$, $B(6; 6)$, $C(9; 4)$, $D(6; 2)$.

Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство: Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Найдем координаты середин диагоналей AC и BD .

Пусть M – середина AC , тогда $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$;

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \Rightarrow M(6; 4).$$

Пусть N – середина BD , тогда $x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{6+6}{2} = 6$;

$$y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \Rightarrow N(6; 4).$$

Точки M и N совпадают $\Rightarrow$ диагонали AC и BD имеют общую точку $M(N)$. Докажем теперь, что AC и BD не лежат на одной прямой, т. е. $\overrightarrow{AC} \neq k \cdot \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AC} \{6; 0\}$, $\overrightarrow{BD} \{0; -4\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \neq k \cdot \overrightarrow{BD} \Rightarrow AC$ и BD не лежат на одной прямой $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм.

Задача № 5

Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(3; 5)$, $B(1; 3)$, $C(4; 4)$. Определите вид треугольника. Найдите координаты центра описанной вокруг треугольника окружности и ее радиус.

Решение: Найдем длины сторон треугольника.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2}.$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \left((2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{10}^2 \right) \Rightarrow \text{по теореме, об-}$$

ратной теореме Пифагора, $\triangle ABC$ – прямоугольный с гипотенузой BC , $\angle A = 90^\circ$.

Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы.

Пусть K – центр окружности, тогда $x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$;

$$y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow K\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

$$R = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right); \frac{\sqrt{10}}{2}$.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пп. 88, 89; вопросы 9–13.

Решить задачи:

I уровень: № 930, 932, 935, 936, № 11 (из рабочей тетради);

II уровень: № 933, 935, 936, дополнительные задачи № 3, 4, 5.

Урок 18

Простейшие задачи в координатах

Цель урока:

- Совершенствование навыков решения задач методом координат.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверить домашние задачи:

№ 11 (из рабочей тетради) – устно;

№ 232 – решение подготовить на доске;

№ 3, 4, 5 – индивидуально у нескольких учеников.

Задача № 11

Найдите координаты вершины B параллелограмма $ABCD$, если $A(0; 0)$, $C(5; 7)$, $D(3; 0)$.

Решение:

1) Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, следовательно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Так как $C(5; 7)$, $D(3; 0)$, то $\overrightarrow{DC} \{2; 7\}$, поэтому $\overrightarrow{AB} \{2; 7\}$.

2) Так как $A(0; 0)$, $\overrightarrow{AB} \{2; 7\}$, то $B(2; 7)$.

Ответ: $B(2; 7)$.

Задача № 232

Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный ($AC = BC$), то высота CO является медианой $AB = 2a$, значит $AO = BO = a$.

Точка A лежит на отрицательной полуоси Ox , $OA = a \Rightarrow A(-a; 0)$.

Точка B лежит на положительной полуоси Ox , $OB = a \Rightarrow B(a; 0)$.

Точка C лежит на положительной полуоси Oy , $CO = h \Rightarrow C(0; h)$.

Ответ: $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; h)$.

2. Решить устно задачи № 934, 938 (а, б, е), 940 (а, б).

Индивидуальная работа по карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. Даны точки $A(2; -3)$, $B(-4; 1)$, $C(-3; -2)$.

Найдите: а) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$;

- б) координаты середин отрезков AC , BC ;
в) расстояния между точками A и B , B и C .

2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

Найдите: а) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$.

II уровень (карточка № 2)

1. $ABCD$ – параллелограмм. $A(-4; 1)$, $B(-2; 5)$, $C(6; 3)$.

Найдите координаты вершины D и точки пересечения диагоналей. Вычислите периметр параллелограмма.

2. Дано: $OA = 6$; $OB = 10$ (рис. 131).

Найти: длины медиан треугольника OAB .

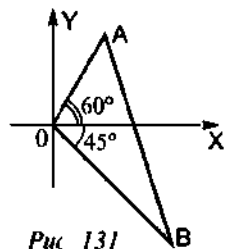


Рис. 131

III уровень (карточка № 3)

1. Даны точки $M(-2; 2)$, $N(4; -1)$, $K(1; -7)$, $P(-5; 4)$.

Докажите, что $MNKP$ – квадрат.

2. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(6; -4)$. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности.

III. Решение задач

Разобрать решение задач № 947 (а), 948 (а).

Задача № 947 (а)

Решение (рис. 132):

Найдем стороны треугольника ABC :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \\ &= \sqrt{(1 - 0)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{26}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \\ &= \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 + 4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{26}.$$

Так как $AB = AC$, то $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием $BC \Rightarrow$ высота AH является его медианой, т. е. $BH = CH = \sqrt{13}$.

$\triangle ABH$ – прямоугольный, по теореме Пифагора

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{26 - 13} = \sqrt{13},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13.$$

Ответ: 13.

– Какой треугольник называется равнобедренным?

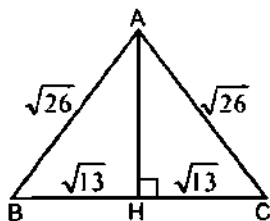


Рис. 132

- Сможем ли мы найти стороны треугольника, если известны координаты его вершин?
- Какая формула используется для вычисления длины отрезка, если известны координаты его начала и конца?
- Как найти площадь равнобедренного треугольника?
- Какую из высот равнобедренного треугольника удобнее находить?
- Что вы знаете о высоте равнобедренного треугольника, проведенного к основанию?
- Как найти координаты точки H , если H – середина основания BC ?
- Как найти длину высоты AH ?

Задача № 948 (а)

Пусть точка Y равноудалена от точек $A(-3; 5)$ и $B(6; 4)$, т. е. $AY = BY$.

$$AY = \sqrt{(x_Y - x_A)^2 + (y_Y - y_A)^2} = \sqrt{(0+3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{y^2 - 10y + 34},$$

$$BY = \sqrt{(x_Y - x_B)^2 + (y_Y - y_B)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{y^2 - 8y + 52}.$$

$$AY = BY \Rightarrow y^2 - 10y + 34 = y^2 - 8y + 52 \Rightarrow 2y = -18 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow Y(0; -9).$$

Ответ: $(0; -9)$.

Наводящие вопросы:

- Указанная точка лежит на оси ординат. Что вы можете сказать о ее координатах?
- Точка Y равноудалена от точек A и B . Как это утверждение записать на языке математики?
- Чему равно расстояние от точки A до точки Y ? От точки B до точки Y ?

IV. Самостоятельное решение задач

I уровень: № 13, 14, 15 – из рабочей тетради, № 942, 943 – из учебника;

II уровень: № 942, 943, 945, 949 (6).

Задача № 13

Заполните таблицу, если точка K – середина отрезка BC .

B	$(3; -1)$	$(0; 5)$	$(8; -4)$
C	$(7; 3)$	$(-4; -3)$	$(4; 0)$
K	$(5; 1)$	$(-2; 1)$	$(6; -2)$

Задача № 14

Найдите координаты середины медианы AM треугольника ABC , если $A(-2; 4)$, $B(2; -1)$, $C(6; 1)$.

Решение:

- 1) Отрезок AM – медиана треугольника ABC , поэтому точка M – середина стороны BC . По условию задачи $B(2; -1)$, $C(6; 1)$, следовательно, $M(4; 0)$.
- 2) Пусть точка K – середина отрезка AM . Так как $A(-2; 4)$, $M(4; 0)$, то $K(1; 2)$.

Ответ: $(1; 2)$.

Задача № 15

Найдите длины векторов: $\vec{a}\{-3; 4\}$, $\vec{b}\{5; 0\}$, $\vec{c}\{0; -2\}$.

Решение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5; \quad |\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Ответ: $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 5$; $|\vec{c}| = 2$.

Задача № 942

Решение: так как AM – медиана треугольника ABC , то M – середина BC , тогда $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$; $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1$, поэтому $M(3; -1)$.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $AM = \sqrt{13}$.

Задача № 943

Решение (рис. 133):

Так как точка B лежит на положительной полуоси Ox и $OB = b$, то $B(b; 0)$.

Точка A лежит на отрицательной полуоси Ox , $OA = a$, поэтому $A(-a; 0)$.

Точка C лежит на положительной полуоси Oy , $OC = h$, поэтому $C(0; h)$.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0+a)^2 + (h-0)^2} = \sqrt{a^2 + h^2},$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0-b)^2 + (h-0)^2} = \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Ответ: $AC = \sqrt{a^2 + h^2}$; $BC = \sqrt{b^2 + h^2}$.

Задача № 945

Решение (рис. 134):

Найдем координаты вершин трапеции $O(0; 0)$, $B(b; c)$.

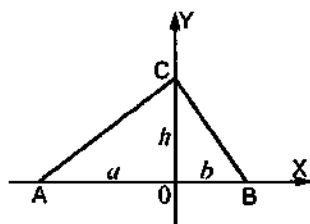


Рис. 133

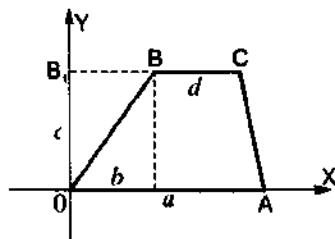


Рис. 134

Точка A лежит на положительной полуоси Ox , поэтому $A(a; 0)$.

$B_1B = b$, $B_1C = B_1B + BC = b + d$.

Расстояние от точки C до оси Ox равно c , поэтому $C(b + d; c)$.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(b + d - a)^2 + (c - 0)^2} = \\ = \sqrt{(b + d - a)^2 + c^2},$$

$$OC = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = \sqrt{(b + d)^2 + c^2}.$$

Ответ: $AC = \sqrt{(b + d - a)^2 + c^2}$, $OC = \sqrt{(b + d)^2 + c^2}$.

Задача № 949 (б)

Пусть точка X – точка на оси абсцисс, равноудаленная от точек $A(1; 2)$ и $B(-3; 4)$, тогда $X(x; 0)$ и $AX = BX$, т. е.:

$$AX = \sqrt{(x_A - x_X)^2 + (y_A - y_X)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5},$$

$$BX = \sqrt{(x_B - x_X)^2 + (y_B - y_X)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 25},$$

тогда $x^2 - 2x + 5 = x^2 + 6x + 25$, откуда $x = -2,5$, т. е. $X(-2,5; 0)$.

Ответ: $(-2,5; 0)$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи:

I уровень – № 16, 17 из рабочей тетради, № 944, 949 (а) из учебника;

II уровень – № 944, 948 (б), 947 (б), 948 (б), 949 (б).

Урок 19

Решение задач методом координат

Цель урока:

- Совершенствование навыков решения задач методом координат.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

№ 16, 17 (из рабочей тетради) – индивидуально, № 944 – подготовить на доске.

Задача № 944

Решение (рис. 135):

- а) Т. к. вершина A лежит на положительной полуоси Ox , $OA = a$, то $A(a; 0)$.
Вершина B имеет координаты $(b; c)$,
 $OA = BC = a$, поэтому $C(b + a; c)$.

Ответ: $C(b + a; c)$.

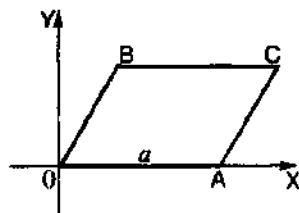


Рис. 135

Наводящие вопросы:

- Чему равны координаты точки A , если известно, что она лежит на положительной полуоси Ox и $OA = a$?
- Как найти координаты вершины C , если $B(b; c)$, $A(a; 0)$?

б) Так как $A(a; 0)$, $C(b+a; c)$, то

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(b+a-a)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$\begin{aligned} CO &= \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = \sqrt{(b+a-0)^2 + (c-0)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}. \end{aligned}$$

Наводящие вопросы:

- Как найти длину отрезка AC , если известны координаты точек A и C ?
- Как найти длину отрезка CO , если $O(0; 0)$, $C(b+a; c)$?

Задача № 16

Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, если $A(5; -3)$, $B(2; 1)$, $M(5; 3)$.

Решение:

$$а) |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$б) |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(5-5)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: $|\overrightarrow{AB}| = 5$; $|\overrightarrow{AM}| = 6$.

Задача № 17

Найдите длины сторон AB и BC и длину BK треугольника ABC , если $A(-2; 4)$, $B(10; -1)$, $C(6; -4)$.

Решение:

$$а) AB = \sqrt{(10+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$б) BC = \sqrt{(6-10)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

в) Так как отрезок BK – медиана треугольника ABC , то точка K является серединой стороны AC , следовательно, $K(2; 0)$.

$$\text{Поэтому } BK = \sqrt{(2-10)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{65}.$$

Ответ: $AB = 13$; $BC = 5$; $BK = \sqrt{65}$.

Индивидуальная дифференцированная работа по карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. В треугольнике OAB проведена медиана OM . Определите координаты точки M и ее длину, если точки A и B имеют координаты $A(-5; 0)$, $B(0; -3)$, а точка O является началом координат.

2. Дан треугольник ABC . Вычислите периметр треугольника, образованного его средними линиями, если $A(7; -4)$, $B(-4; 3)$ и $C(-5; 0)$.

II уровень (карточка № 2)

1. В окружности с центром M проведен диаметр KP . Определите координаты центра окружности и ее радиус, если $A(-6; -1)$, $B(2; 5)$.
2. Даны точки $A(-1; -3)$, $B(-4; 3)$, $C(5; 0)$. Вычислите длину медианы BM и длину биссектрисы AK .

III уровень (карточка № 3)

1. На диаметре AB окружности с центром в точке $O(2; -5)$ отмечена точка $C(-1; -3)$ так, что она является серединой радиуса OA . Найдите координаты концов диаметра AB и ее длину.
2. Вершина C трапеции $OABC$ лежит на положительной полуоси Ox , $OC = 10$, $AB = 6$, вершины A и B расположены в четвертой координатной четверти. Определите координаты точек M и N , если известно, что MN – средняя линия трапеции.

III. Теоретический тест (с последующей взаимопроверкой)

I вариант

1. Если $A(c; d)$, $B(m; n)$, $C(x; y)$ – середина отрезка AB , то:

а) $x = \frac{c+m}{2}$; $y = \frac{d+n}{2}$.

б) $x = \frac{c-m}{2}$; $y = \frac{d-n}{2}$.

в) $x = \frac{m-c}{2}$; $y = \frac{n-d}{2}$.

2. Если $\vec{a}\{x; y\}$, $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ ($k \neq 0$), то:

а) $\vec{c}\left\{\frac{x}{k}; \frac{y}{k}\right\}$.

б) $\vec{c}\{k \cdot x; k \cdot y\}$.

в) $\vec{c}\{k+x; k+y\}$.

3. Если $\vec{d}\{m; n\}$, то:

а) $|\vec{d}| = \sqrt{m^2 - n^2}$.

б) $|\vec{d}| = \sqrt{m^2 + n^2}$.

в) $|\vec{d}| = \sqrt{(m-n)^2}$.

4. Если $\vec{a}\{a; b\}$, $\vec{b}\{c; d\}$, $\vec{c}\{a-c; b-d\}$, то:

а) $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

б) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

в) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

5. Если $|\overline{CD}| = \sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$, то:

а) $C(b; d), D(a; c)$.

б) $C(a; b), D(c; d)$.

в) $C(c; d), D(a; b)$.

6. Если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, то:

а) $\vec{a} = -2\vec{b}$.

б) $\vec{a} = 2\vec{b}$.

в) $\vec{b} = 2\vec{a}$.

7. Если $\overline{MN} \{a-b; c-d\}$, то:

а) $M(a; c), N(b; d)$.

б) $M(a; b), N(c; d)$.

в) $M(b; d), N(a; c)$.

II вариант

1. Если $A(a; b), B(c; d)$, то:

а) $\overline{AB}\{a-c; b-d\}$.

б) $\overline{AB}\{c-a; d-b\}$.

в) $\overline{AB}\{a+c; b+d\}$.

2. Если $\vec{a}\{m; n\}$, $\vec{b}\{p; k\}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то:

а) $\vec{c}\{c \cdot p; n \cdot k\}$.

б) $\vec{c}\{m+n; p+k\}$.

в) $\vec{c}\{m+p; n+k\}$.

3. Если $A(e; c), B(m; n)$, то:

а) $|\overline{BA}| = \sqrt{(e-m)^2 + (c-n)^2}$.

б) $|\overline{BA}| = \sqrt{(m-e)^2 + (n-c)^2}$.

в) $|\overline{BA}| = \sqrt{(e-c)^2 + (m-n)^2}$.

4. Если $A(e; p), B(m; n), C\left(\frac{m+e}{2}; \frac{n+p}{2}\right)$, то:

- а) C – середина AB .
 б) A – середина BC .
 в) B – середина AC .
5. Если $\vec{x} = \sqrt{a^2 + b^2}$, то:
 а) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$.
 б) $\vec{x} \in \{a^2; b^2\}$
 в) $\vec{x} \in \{b; a\}$.
6. Если $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}$, $|\vec{n}| = \frac{1}{3}|\vec{m}|$, то:
 а) $\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{m}$.
 б) $\vec{m} = -3\vec{n}$.
 в) $\vec{m} = 3\vec{n}$.
7. Если $\vec{x} \in \{a; b\}$, $\vec{y} \in \{k \cdot a; k \cdot b\}$ ($k \neq 0$), то:
 а) $\vec{y} = k \cdot \vec{x}$.
 б) $\vec{x} = k \cdot \vec{y}$.
 в) $\vec{x} \cdot \vec{y} = k$.

Ответы к заданиям теста

	1	2	3	4	5	6	7
I вариант	а	б	б	в	а	б	в
II вариант	б	в	а	а	в	б	а

IV. Решение задач

Разобрать решение задач № 951 (а), 954.

Задача № 951 (а)

Четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник, если $ABCD$ – параллелограмм, в котором диагонали равны.

Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм, т. е. его диагонали AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть O – середина отрезка AC , Q – середина BD , тогда:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1; \quad y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2;$$

$$x_Q = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1; \quad y_Q = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

Следовательно, точки $O(-1; -2)$ и $Q(-1; -2)$ совпадают, т. е. AC и BD имеют общую точку $O(Q)$. Докажем, что AC и BD не лежат на одной прямой, т. е. $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ не коллинеарны и их координаты не пропорциональны. $\vec{AC} \{4; -2\}$, $\vec{BD} \{-4; -2\} \Rightarrow \vec{AC} \neq k \cdot \vec{BD}$.

Докажем, что диагонали $ABCD$ равны:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ABCD$ – прямоугольник.

Наводящие вопросы:

- Сформулируйте признак прямоугольника. (Какой четырехугольник является прямоугольником?)
- Как доказать, что $ABCD$ – параллелограмм? Достаточно ли будет того, что диагонали AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам?
- Может ли быть такое, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой?
- Как доказать, что точки A, B, C, D не лежат на одной прямой?
- Как доказать, что параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником? Как найти диагонали AC и BD ?

Задача № 954

Решение:

Поместим данный равнобедренный треугольник в прямоугольную систему координат таким образом, чтобы медиана лежала на положительной полуоси Oy , а его основание – на оси Ox (рис. 136).

Т. к. медиана равна 160 см, а основание – 80 см, то $A(-40; 0)$, $B(0; 160)$, $C(40; 0)$.

Пусть M и N – середины сторон AB и

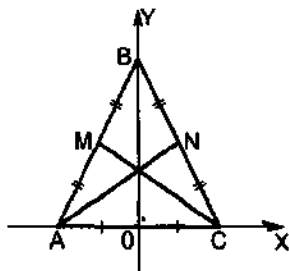


Рис. 136

BC соответственно, тогда $x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = 20$, $y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = 80 \Rightarrow$

$M(-20; 80)$, $N(20; 80)$. AN и CM – медианы, найдем их длины:

$$\begin{aligned} AN &= \sqrt{(x_N - x_A)^2 + (y_N - y_A)^2} = \sqrt{(20 + 40)^2 + (80 - 0)^2} = \\ &= \sqrt{3600 + 6400} = 100 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(-20 - 40)^2 + (80 - 0)^2} = \\ &= \sqrt{3600 + 6400} = 100 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Ответ: 100 см, 100 см.

Наводящие вопросы:

- Как расположить треугольник в прямоугольную систему координат, чтобы по данным задачи можно было определять координаты вершин треугольника?
- Чему равны координаты вершин A, B, C треугольника ABC ?

- Что вы можете сказать о медианах равнобедренного треугольника, проведенных к его боковым сторонам?
- Как найти координаты точки N , если известно, что AN – медиана $\triangle ABC$?
- Чему равны координаты точки N ?
- Чему равна длина медианы AN ? А длина медианы CM ?

Самостоятельное решение задач

I уровень: № 950 (а);

II уровень: № 955.

Задача № 950 (а)

Четырехугольник $MNPQ$ – параллелограмм, если его диагонали MP и NQ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Найдем координаты середины диагонали MP – точки A :

$$x_A = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{1+7}{2} = 4; \quad y_A = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(4; \frac{5}{2}\right).$$

Найдем координаты середины диагонали NQ – точки B :

$$x_B = \frac{x_N + x_Q}{2} = \frac{6+2}{2} = 4; \quad y_B = \frac{y_N + y_Q}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow B\left(4; \frac{5}{2}\right).$$

Средины диагоналей совпадают, значит, диагонали пересекаются в точке A (B) и делятся ею пополам, т.е. MP и NQ имеют общую точку. Докажем, что MP и NQ не лежат на одной прямой, т.е. $\overrightarrow{MP} \neq k \cdot \overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{MP} \{6; 3\}$, $\overrightarrow{NQ} \{-4; 3\} \Rightarrow \overrightarrow{MP} \neq k \cdot \overrightarrow{NQ}$.

Найдем диагонали MP и NQ :

$$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$NQ = \sqrt{(x_Q - x_N)^2 + (y_Q - y_N)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: $MP = 3\sqrt{5}$, $NQ = 5$.

Задача № 955

Решение (рис. 137):

Поместим треугольник ABC в прямоугольную систему координат так, чтобы высота BO , равная 10 см, лежала на положительной полуоси Oy , сторона AC , которая делится высотой BO на отрезки AO и CO , равные соответственно 10 см и 4 см, лежала на оси Ox . Тогда $A(-10; 0)$, $B(0; 10)$, $C(4; 0)$, $O(0; 0)$.

Из двух оставшихся сторон (AB и CB) меньшей будет CB , так как $OC < AO$. Пусть M – середина стороны CB , тогда AM – медиана,

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 2; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 5 \Rightarrow$$

$M(2, 5)$

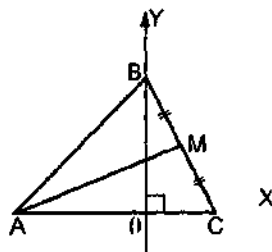


Рис. 137

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(2+10)^2 + (5-0)^2} = \\ = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

Ответ: 13 см.

V. Самостоятельная работа

I уровень

Работа обучающего характера с оказанием индивидуальной дифференцированной помощи учителем: решить задачи № 12 – из рабочей тетради, № 947 (б), 948 (б), 949 (б) – из учебника.

Задача № 947 (б)

Указание: докажи, что две стороны $\triangle ABC$ равны. Опустить высоту к основанию $\triangle ABC$ и найди ее длину. Основание высоты – середина основания $\triangle ABC$.

Задача № 948 (б)

Указание: пусть $A(0; y)$ – точка, равноудаленная от C и D , тогда

$$CA = DA, \text{ т. е. } \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}.$$

Задача № 12

Даны точки: $A(2; -1)$, $B(5; -3)$, $C(-2; 11)$, $D(-5; 13)$. Докажите, что они являются вершинами параллелограмма.

Доказательство: Воспользуемся признаком параллелограмма: если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом. В силу этого признака достаточно показать, что: а) $\overline{AB} = \overline{DC}$; б) точки A , B и D не лежат на одной прямой.

а) Так как $A(2; -1)$, $B(5; -3)$, то $\overline{AB} \{3; -2\}$; так как $C(-2; 11)$, $D(-5; 13)$, то $\overline{DC} \{3; -2\}$. Итак, $\overline{AB} = \overline{DC}$.

б) Точки A , B и D лежат на одной прямой, если координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ пропорциональны. Так как $\overline{AB} \{3; -2\}$ и $\overline{AD} \{-7; 14\}$, то координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ не пропорциональны, поэтому эти векторы не коллинеарны и, следовательно, точки A , B и D не лежат на одной прямой. Итак, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

II уровень

I вариант

1. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек $A(-2; 6)$ и $B(7; 3)$.
2. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(9; -1)$, $D(7; 5)$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм. Найдите его диагонали.

3. В треугольнике MNK проведена высота NO , $\angle NMO = 45^\circ$, $NO = 6$, $OK = 4$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины M .

II вариант

1. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек $M(-3; 8)$ и $N(6; 5)$.
2. Четырехугольник $MNKP$ задан координатами своих вершин $M(-6; 1)$, $N(2; 5)$, $K(4; -1)$, $P(-4; -5)$. Докажите, что $MNKP$ – параллелограмм. Найдите его диагонали.
3. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, высота BO делит сторону AC на отрезки $AO = 4$ и $CO = 8$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины C .

III уровень

I вариант

1. В параллелограмме $ABCD$ $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$, $D(6; -1)$. Найдите координаты середины отрезка CO , если O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.
2. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(2; 2\sqrt{3})$, $B(0; 0)$, $C(3; \sqrt{3})$. Найдите углы треугольника.
3. В треугольнике MNK $MN = 4$, $MK = 6$, $\angle M = 60^\circ$. Найдите медианы треугольника.

II вариант

1. В параллелограмме $ABCD$ $A(-4; -2)$, $B(2; 6)$, $D(4; 8)$. Найдите координаты середины отрезка DO , если O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.
2. Треугольник MNK задан координатами своих вершин $M(4; 1)$, $N(7; 3)$, $K(2; 4)$. Найдите углы треугольника.
3. В треугольнике ABC $AB = 8\sqrt{2}$, $AC = 18$, $\angle A = 45^\circ$. Найдите медианы треугольника.

Ответы к задачам самостоятельной работы

II уровень

I вариант

1. $(1; 0)$;
2. $AC = 2\sqrt{17}$; $BD = 2\sqrt{29}$;
3. $\sqrt{73}$.

II вариант

1. $(0; 2)$;
2. $MK = 2\sqrt{26}$; $NP = 2\sqrt{34}$;
3. $2\sqrt{26}$.

III уровень

I вариант

1. $\left(7; \frac{5}{2}\right)$;
2. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$;

3. $\sqrt{19}$; $2\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$.

II вариант

1. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$;

2. $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 45^\circ$;

3. $\sqrt{65}$; $2\sqrt{53}$; $\sqrt{185}$.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи:

I уровень: № 18 – из рабочей тетради, № 946, 950 (б), 951 (б) – из учебника.

II уровень: № 18 – из рабочей тетради, № 946, 951 (б) – из учебника, № 952, 953 – устно.

Урок 20

Уравнение окружности

Цели урока:

- Вывести уравнение окружности.
- Показать применение уравнения окружности при решении задач.
- Совершенствование навыков решения задач методом координат.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

1. Проверить домашние задачи:

№ 18 (из рабочей тетради) – устно;

№ 946 (б) подготовить на доске.

Задача № 18

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, и найдите его площадь, если $A(-3; 4)$, $B(7; 9)$, $C(5; -2)$, $D(-5; -7)$.

Решение:

- а) Четырехугольник является ромбом, если все его стороны равны. Действительно, если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник является параллелограммом. А параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом.

Сравним длины сторон данного четырехугольника:

$$AB^2 = (7 + 3)^2 + (9 - 4)^2 = 100 + 25 = 125,$$

$$BC^2 = (5 - 7)^2 + (-2 - 9)^2 = 4 + 121 = 125,$$

$$CD^2 = (-5 - 5)^2 + (-7 + 2)^2 = 100 + 25 = 125,$$

$$DA^2 = (-5 + 3)^2 + (-7 - 4)^2 = 4 + 121 = 125.$$

Следовательно, $AB^2 = BC^2 = CD^2 = DA^2$ и $AB = BC = CD = DA$.

- б) Итак, четырехугольник $ABCD$ является ромбом, поэтому его площадь равна половине произведения его диагоналей.

$$AC^2 = (-3 - 5)^2 + (-2 - 4)^2 = 100, \text{ следовательно, } AC = 10;$$

$$BD^2 = (-5 - 7)^2 + (-7 - 9)^2 = 400, \text{ следовательно, } BD = 20,$$

$$S_{ABCD} = 0,5 \cdot BD = 0,5 \cdot 10 \cdot 20 = 100.$$

Ответ: 100.

Задача № 946 (б)

Дано: $M_1(-1; x)$; $M_2(2x; 3)$; $M_1M_2 = 7$.

Найти: x .

Решение:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_{M_2} - x_{M_1})^2 + (y_{M_2} - y_{M_1})^2} = \sqrt{(2x+1)^2 + (3-x)^2} = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 + (3-x)^2 = 49.$$

$$4x^2 + 4x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 49;$$

$$5x^2 - 2x - 39 = 0.$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-39) = 784.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 28}{2 \cdot 5}; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -2,6.$$

Ответ: $x = 3$ или $x = -2,6$.

Наводящие вопросы:

- Как бы мы нашли расстояние между точками M_1 и M_2 , если бы были известны их координаты?
- Каким образом можно найти значение x , используя тот факт, что $M_1M_2 = 7$?

III. Математический диктант

I уровень – с последующей самопроверкой;

II уровень – с самопроверкой по подготовленному решению задач.

I вариант

1. Найдите координаты центра окружности, если AB – диаметр, $A(2; -4)$, $B(-6; 8)$.
2. Вычислите радиус окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $M(12; -5)$.
3. Как называется геометрическая фигура, состоящая из множества всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки?
4. Как называется хорда, проходящая через центр окружности?
5. Расстояние от центра окружности до точки A равно d , а радиус окружности равен r . Сравните d и r , если точка A лежит вне круга, ограниченного данной окружностью.
6. Пересекаются ли окружности с центрами A и B , если $AB = 10$ см, а радиусы окружностей равны 5 см и 6 см?
7. Найдите координаты точек пересечения окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 7, с осями координат.

II вариант

1. Найдите координаты центра окружности, если CD – диаметр, $C(4; 5)$, $D(-6; 7)$.
2. Вычислите радиус окружности с центром в точке $N(-6, -8)$, проходящей через начало координат.
3. Как называется геометрическая фигура, состоящая из множества всех точек плоскости, находящихся от данной точки на расстоянии, не превышающем данного?
4. Как называется отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности?
5. Расстояние от центра окружности до точки B равно m , а радиус окружности равен r . Сравните m и r , если точка B лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью.
6. Пересекаются ли окружности с центрами C и D , если $CD = 12$ см, а радиусы окружностей равны 4 см и 7 см?
7. Найдите координаты точек пересечения окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 6, с осями координат.

Ответы к заданиям математического диктанта

<i>I вариант</i>	<i>II вариант</i>
1. $(-2; 2)$;	1. $(-1; 6)$;
2. 13;	2. 10;
3. окружность;	3. круг;
4. диаметр;	4. радиус;
5. $d > r$;	5. $m > r$;
6. да;	6. нет;
7. $(0; 7)$, $(-7; 0)$, $(0; -7)$, $(7; 0)$.	7. $(6; 0)$, $(0; 6)$, $(-6; 0)$, $(0; -6)$.

Задачи для II уровня**Задача 1**

Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 14 см. Найдите длины отрезков, соединяющих середины оснований с серединами боковых сторон трапеции, если высота трапеции равна 8.

Решение (рис. 138):

Поместим трапецию $ABCD$ в прямоугольную систему координат так, чтобы середины оснований трапеции лежали на положительной полуоси Ox . Т. к. $BC = 10$, $AD = 14$, $OK = 8$, то $A(-7; 0)$, $B(-5; 8)$, $C(5; 8)$, $D(7; 0)$, $O(0; 0)$, $K(0; 8)$.

Пусть M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно, тогда

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -6; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 4;$$

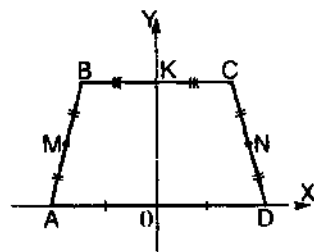


Рис. 138

$$x_N = \frac{x_C + x_D}{2} = 6; \quad y_N = \frac{y_C + y_D}{2} = 4 \Rightarrow M(-6; 4), N(6; 4).$$

$$MK = KN = \sqrt{(6-0)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}.$$

$$MO = NO = \sqrt{(0-6)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{13}.$$

Ответ: $2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}$.

Задача 2

Используя метод координат, найдите пару чисел x и y , удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$.

Решение (рис. 139): Используя формулы расстояния между двумя точками, можно предположить, что $A(x; y)$, $B(0; 2)$, $C(0; 0)$, $D(4; 2)$, тогда по условию задачи $BA = CA = DA$.

Точка A равноудалена от точек B, C, D , $\triangle BCD$ — прямоугольный $\Rightarrow A$ — середина гипотенузы $CD \Rightarrow x = \frac{x_C + x_D}{2} = 2$,

$$y = \frac{y_C + y_D}{2} = 1.$$

Ответ: $x = 2; y = 1$.

Задача 3

В прямоугольнике $ABCD$ точка K делит диагональ BD в отношении $2:1$, считая от вершины B . Точка E — середина стороны CD . Используя метод координат, докажите, что точка K принадлежит отрезку AE и делит его в отношении $1:2$.

Доказательство (рис. 140):

Поместим прямоугольник $ABCD$ в прямоугольную систему координат. Пусть $D(d; 0)$, $B(0; b)$. Точка K делит отрезок BD в отношении $2:1$, т.е. $BK:KD = 2:1$, тогда по теореме Фалеса $AK_1:K_1D = 2:1$, $BK_2:K_2A = 2:1$, т.е.:

$$AK_1 = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}d, \quad AK_2 = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}b \Rightarrow K\left(\frac{2}{3}d; \frac{1}{3}b\right).$$

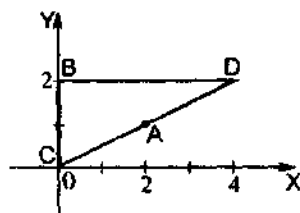


Рис 139

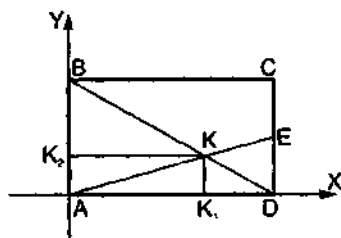


Рис 140

Докажем, что точки A, K, E лежат на одной прямой, т. е. векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AE}$ коллинеарны, значит, их коэффициенты пропорциональны.

$$\overrightarrow{AK} \left\{ \frac{2}{3}d; \frac{1}{3}b \right\}, \overrightarrow{AE} \left\{ d; \frac{b}{2} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AK} \Rightarrow |\overrightarrow{AE}| = \frac{3}{2} |\overrightarrow{AK}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE = \frac{3}{2} AK \Rightarrow AK = 2 KE \Rightarrow AK : KE = 2 : 1, KE : KA = 1 : 2,$$

что и требовалось доказать.

III. Изучение нового материала

1. Изложить п. 90 «Уравнение линии на плоскости» в виде небольшой лекции, обратив особое внимание на следующие факты:

- ✓ – Если точка лежит на данной линии, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой линии.
- ✓ – Координаты любой точки, не лежащей на данной линии, не удовлетворяют ее уравнению.

Примеры для закрепления:

Принадлежит ли т. A уравнению линии $y = f(x)$, если известно, что:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$; $A(2; 6)$?

б) $f(x) = \sqrt{\frac{5x-3}{2}}$, $A(1; -1)$?

в) $f(x) = \left| \frac{3x+5}{x-4} \right|$, $A(-1; 0,4)$?

2. Вывести уравнение окружности в процессе решения мини-задач.

- а) Дано: $A(x_0; y_0)$ – центр окружности, $B(x; y)$ – произвольная точка окружности (см. рис. 141).

Найти: радиус данной окружности.

Ответ: $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

- б) Удовлетворяют ли координаты любой точки окружности уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$? Почему?

Уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

где $(x_0; y_0)$ – центр окружности;
 $(x; y)$ – произвольная точка окружности;
 r – радиус окружности.

- в) Составьте уравнение окружности с центром в начале координат.

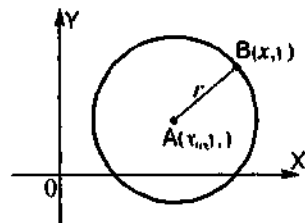


Рис. 141

Ответ:

Уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где r – радиус окружности.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачу № 22 из рабочей тетради.

Задача № 22

Постройте окружность, заданную уравнением:

а) $x^2 + y^2 = 16$;

б) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$;

в) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$.

Решение:

Для построения окружности необходимо знать ее радиус и координаты ее центра. Если уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, то ее радиус равен r , а центром является точка с координатами $(a; b)$.

а) Уравнение $x^2 + y^2 = 16$ запишем в виде $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$. Отсюда следует, что центр окружности – точка $(0; 0)$, а радиус равен 4. Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 16$ (см. рис. 142).

б) Уравнение $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ представим в виде $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$. Следовательно, центр окружности – точка $(1; 0)$, а радиус равен 2. Построим искомую окружность, заданную уравнением $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ (см. рис. 143).

в) Чтобы выделить квадрат двучлена с переменной x и квадрат двучлена с переменной y , прибавим к обеим частям уравнения $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ слагаемые 1 и 4.

Получим уравнение $(x^2 + 2x + 1)^2 + (y^2 - 4y + 4)^2 = 4 + 1 + 4$, которое запишем в виде $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Значит, центр окружности – точка $(-1; 2)$, а радиус равен 3. Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ (см. рис. 144).

2. Разобрать решение задачи № 961.

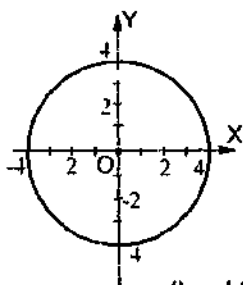


Рис 142

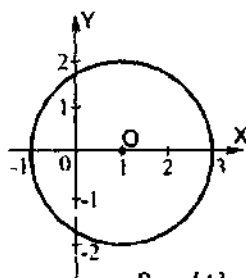


Рис 143

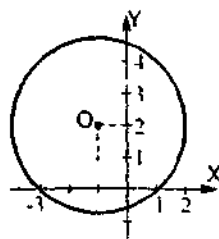


Рис 144

Задача № 961

Так как окружность задана уравнением $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$, то координаты точек A, B, C, D можно подставить в уравнение окружности и таким образом определить взаимное расположение точки и окружности.

$A(-2; 4) \Rightarrow (-2 + 5)^2 + (4 - 1)^2 = 9 + 9 = 16 \Rightarrow$ точка A лежит вне круга, ограниченного данной окружностью.

$B(-5; -3) \Rightarrow (-5 + 5)^2 + (-3 - 1)^2 = 16 \Rightarrow$ точка B лежит на окружности.

$C(-7; -2) \Rightarrow (-7 + 5)^2 + (-2 - 1)^2 = 4 + 9 = 13 < 16 \Rightarrow$ точка C лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью.

$D(1; 5) \Rightarrow (1 + 5)^2 + (5 - 1)^2 = 36 + 16 = 52 > 16 \Rightarrow$ точка D лежит вне круга, ограниченного данной окружностью.

Ответ: а) C ; б) B ; в) A, D .

V. Самостоятельное решение задач

I уровень – № 959 (в, д), 964 (б), 966 (а, в);

II уровень – № 964 (б), 966 (а, в), дополнительные задачи № 1, 2.

Задача № 964 (б)

Решение: Пусть точка $A(x; 5)$ лежит на окружности, заданной уравнением $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25 \Rightarrow (x - 3)^2 = 25 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x - 3 = \pm 5 \Rightarrow x = 8; -2 \Rightarrow A_1(8; 5), A_2(-2; 5).$

Ответ: $(8; 5)$ и $(-2; 5)$.

Задача № 966

Уравнение окружности имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

а) Если $A(0; 5)$ – центр окружности, а радиус $r = 3$, то:

$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + (y - 5)^2 = 9$ – уравнение данной окружности.

в) Если $A(-3; -7)$ – центр окружности, а радиус $r = 1/2$, то:

$(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 1/4$ – уравнение данной окружности.

Дополнительная задача 1

Дано: окружность задана уравнением $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Является ли AB хордой этой окружности, если $A(7; 3)$, $B(-1; -1)$?
 А диаметром?

Решение: Если точки A и B лежат на заданной окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению окружности, а это значит, отрезок AB является хордой этой окружности.

$A(7; 3) \Rightarrow (7 - 4)^2 + (3 + 1)^2 = 25.$

$B(-1; -1) \Rightarrow (-1 - 4)^2 + (-1 + 1)^2 = 25 \Rightarrow AB$ – хорда.

Хорда AB является диаметром данной окружности, если середина отрезка AB совпадает с центром окружности.

Пусть точка C – середина отрезка AB , тогда $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 3;$

$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \Rightarrow C(3; 1).$

Окружность, заданная уравнением $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$, имеет своим центром точку $D(4; -1)$, не совпадающую с точкой C , следовательно, отрезок AB не является диаметром данной окружности.

Дополнительная задача 2

Каково взаимное расположение окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ с линией $x^2 - 6x + y^2 + 10y - 15 = 0$?

Решение:

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y - 15 = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) - 9 - 25 - 15 = \\ = (x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 49 = 0.$$

$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$ — это уравнение окружности с центром в точке $A(3; 5)$ и радиусом $r_1 = 7$.

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ — это уравнение окружности с центром в точке $B(3; -2)$ и радиусом $r_2 = 2$.

$$AB = \sqrt{(3-3)^2 + (-2+5)^2} = 3, \quad r_1 + r_2 = 7 + 2 = 9.$$

$r_1 - r_2 = 7 - 2 = 5 \Rightarrow$ вторая окружность лежит внутри первой.

Дополнительная задача 3

В прямоугольной системе координат треугольник MNK задан координатами своих вершин: $M(-3; 0)$, $N(1; 3)$, $K(5; 0)$. Напишите уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

Решение:

Так как окружность описана около треугольника MNK , то точки M, N, K лежат на данной окружности, т.е. их координаты удовлетворяют уравнению окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $(a; b)$ — центр окружности.

$$M(-3; 0) \Rightarrow (-3 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow (3 + a)^2 + b^2 = r^2,$$

$$N(1; 3) \Rightarrow (1 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2,$$

$$K(5; 0) \Rightarrow (5 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow (5 - a)^2 + b^2 = r^2.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (3 + a)^2 + b^2 = r^2 & (1) \\ (1 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 & (2) \\ (5 - a)^2 + b^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3 + a)^2 + b^2 = r^2 & (1) \\ (1 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 & (2) \\ (5 - a)^2 + b^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3 + a)^2 + b^2 = r^2 & (1) \\ (1 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 & (2) \\ (5 - a)^2 + b^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

Приравняем левые части уравнений (1) и (3)

$$(3 + a)^2 + b^2 = (5 - a)^2 + b^2$$

$$(3 + a)^2 = (5 - a)^2$$

$$3 + a = 5 - a \quad \text{или} \quad 3 + a = a - 5$$

$$a = 1$$

корней нет.

Приравняем левые части уравнений (1) и (2)

$$(3 + a)^2 + b^2 = (1 - a)^2 + (3 - b)^2$$

$$\text{Так как } a = 1, \text{ то } 4^2 + b^2 = 0^2 + 9 - 6b + b^2$$

$$6b = 9 - 16$$

$$b = -7/6.$$

Подставим в уравнение (1) значения a и b

$$(1-3)^2 + (-7/6)^2 = r^2;$$

$$r^2 = 16 + \frac{49}{36} = \frac{16 \cdot 36 + 49}{36} = \frac{625}{36}; \quad r = \frac{25}{6}.$$

Следовательно, уравнение окружности, описанной около треугольника MNK , имеет вид:

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{625}{36}.$$

Ответ: $(x-1)^2 + \left(y + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{625}{36}.$

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пп. 90, 91; вопросы 15–17.

Решить задачи:

I уровень – № 959 (б, г), 962, 964 (а), 966 (б, г);

II уровень – № 962, 964 (а), 966 (б, г), дополнительную задачу № 3.

Урок 21

Уравнение прямой

Цели урока:

- Вывести уравнение прямой и показать применение уравнения прямой при решении задач.
- Совершенствовать навыки решения задач методом координат.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

а) Теоретический опрос по вопросам 15–17.

б) Индивидуальная работа по карточкам.

I уровень (карточка № 1)

1. Окружность задана уравнением $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 49$.

а) Укажите центр окружности и ее радиус.

б) Какие из точек $A(2; 4)$, $B(1; 3)$, $C(-5; -3)$ лежат на данной окружности?

в) Найдите точку с абсциссой -12 , лежащей на данной окружности.

2. Напишите уравнение окружности с центром C и радиусом r , если:

а) $C(-3; 2)$, $r = \sqrt{3}$;

б) $C(0; -6)$, $r = 4\sqrt{5}$.

II уровень (карточка № 2)

- Окружность задана уравнением $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$. Является ли диаметром данной окружности отрезок KP , если $K(-2; 5)$, $P(-2; -3)$?
- Дана окружность $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 100$. Определите, какие из точек $A(-4; 3)$, $B(5; 1)$, $C(-5; 4)$, $D(10; 5)$ лежат:
 - на окружности;
 - внутри круга, ограниченного данной окружностью;
 - вне круга, ограниченного данной окружностью.

III уровень (карточка № 3)

- Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 18 = 0$, является окружностью. Является ли треугольник ABC вписанным в данную окружность, если известно, что $A(7; -5)$, $B(3; -1)$, $C(-1; -5)$?
- В прямоугольной системе координат треугольник SPQ задается координатами своих вершин $S(-2; 1)$, $P(2; 4)$, $Q(6; 1)$. Напишите уравнение окружности, вписанной в треугольник.

III. Повторение изученного

I уровень – математический диктант с последующим обсуждением решения;

II уровень – самостоятельное решение задач.

I уровень (математический диктант)**I вариант**

- Найдите расстояние между точками $A(-5; 1)$ и $B(-2; -3)$.
- Найдите координаты центра окружности с диаметром CD , если $C(4; -7)$, $D(2; -3)$.
- Принадлежит ли точка $E(3; 7)$ линии, заданной уравнением $x^2 - 4x + y = 4$?
- Функция задана уравнением $y = 4x - 5$. Какая линия служит графиком этой функции?
- Проходит ли прямая, заданная уравнением $y = -2x - 4$, через первую координатную четверть?
- Лежит ли точка $P(2; -6)$ внутри круга, ограниченного окружностью $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$?
- Определите вид треугольника, заданного координатами своих вершин: $A(0; 2)$, $B(2; 6)$, $C(6; -1)$.

II вариант

- Найдите расстояние между точками $M(3; -2)$ и $N(-3; 6)$.
- Найдите координаты центра окружности с диаметром PK , если $P(-5; 2)$, $K(-3; 8)$.
- Принадлежит ли точка $S(2; -5)$ линии, заданной уравнением $\frac{8}{x} - y = 9$?

- Функция задана уравнением $y = -1/3x$. Какая линия служит графиком этой функции?
- Проходит ли прямая, заданная уравнением $y = 3x + 2$, через четвертую координатную четверть?
- Лежит ли точка $S(-7; 4)$ вне круга, ограниченного окружностью $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 36$?
- Определите вид треугольника, заданного координатами своих вершин: $M(-8; -3)$, $N(-2; 6)$, $K(4; -3)$.

Ответы к математическому диктанту

I вариант	II вариант
1. 5.	1. 10.
2. $(3; -5)$.	2. $(-4; 5)$.
3. да.	3. да.
4. прямая.	4. прямая.
5. нет.	5. нет.
6. нет.	6. да.
7. прямоугольный.	7. равнобедренный.

II уровень (задачи для самостоятельного решения)

- Дана окружность $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ и точка $C(5; 4)$. Напишите уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внешним образом.

(Ответ: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$.)

- Рис. 145. Дано: окружность с центром в точке S ; A, B – точки касания, $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle AOB = 60^\circ$.

Напишите уравнение этой окружности.

Ответ: $(x-2)^2 + (y+2\sqrt{3})^2 = 4$.

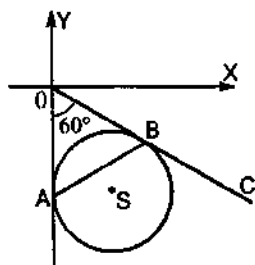


Рис. 145

III. Изучение нового материала

- Вывести уравнение прямой в прямоугольной системе координат (см. п. 92).

Вывод: уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени и имеет вид $ax + by + c = 0$.

- Вывести уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$:
 - параллельной оси Ox : $y = y_0$.
 - параллельной оси Oy : $x = x_0$.

IV. Закрепление изученного материала

Разобрать решение задач № 26, 28 из рабочей тетради.

Задача № 26

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 3)$.

Решение:

Уравнение прямой имеет вид $ax + by + c = 0$. Точки A и B лежат на прямой, т.е. их координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставив координаты точек A и B в уравнение, получим: $a \cdot (-1) + b \cdot 2 + c = 0$; $2 \cdot a + b \cdot (-3) + c = 0$.

Выразим отсюда a и b через c : $a = -5c$ и $b = -3c$. Подставив полученные значения a и b в уравнение $ax + by + c = 0$, приходим к уравнению: $-5cx + (-3c)y + c = 0$. При любом $c \neq 0$ это уравнение является уравнением прямой AB . Сократив на $-c$, получим искомое уравнение прямой AB в виде: $5x + 3y - 1 = 0$.

Ответ: $5x + 3y - 1 = 0$.

Задача № 28

Прямые заданы уравнениями $x + y = 0$ и $2x - y + 3 = 0$.

- Найдите координаты точки пересечения данных прямых.
- Напишите уравнение прямой, проходящей через найденную точку и параллельной оси ординат.

Решение:

- Искомая точка лежит на данных прямых, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых, т.е. являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $x = -1$ и $y = 1$.

- Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно оси ординат имеет вид: $x = x_0$. Учитывая, что $M_0(-1; 1)$, получаем искомое уравнение: $x = -1$.

Ответ: а) $(-1; 1)$; б) $x = -1$.

V. Самостоятельное решение задач

I уровень – № 972 (6), 973, 975;

II уровень – № 973, 975, дополнительную задачу.

Дополнительная задача

Параллелограмм $ABCD$ задан координатами трех своих вершин: $A(-1; 1)$, $B(1; 7)$, $D(7; -3)$. Напишите уравнения прямых BC и DC . Вычислите площадь данного параллелограмма.

Задача № 972 (6)

Решение:

Точки $C(2; 5)$ и $D(5; 2)$ лежат на прямой, следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, значит, $2a + 5b + c = 0$ и $5a + 2b + c = 0$.

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 2a + 5b + c = 0, \\ 5a + 2b + c = 0. \end{cases}$$

Выразим коэффициенты a и b через c и подставим их в уравнение $ax + by + c = 0$,

$$a = -\frac{c}{7}; b = -\frac{c}{7} \Rightarrow -\frac{c}{7}x - \frac{c}{7}y + c = 0.$$

Сократив на c ($c \neq 0$), получаем $x + y - 7 = 0$.

Ответ: $x + y - 7 = 0$.

Задача № 973

Решение:

Так как CM – медиана треугольника ABC , то M – середина отрезка AB , т. е. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \Rightarrow M(0; 3)$.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $C(-1; -4)$ и $M(0; 3)$. Подставим координаты точек C и M в уравнение прямой $ax + by + c = 0 \Rightarrow 7x - y + 3 = 0$ – уравнение прямой CM .

Задача № 975

Прямая пересекается с осью Ox , значит, $y = 0$, таким образом уравнение имеет вид $3x - 4 \cdot 0 + 12 = 0$. Т. е. $(-4; 0)$ – точка пересечения прямой с осью Ox .

Чтобы начертить данную прямую, отметим точки $(-4; 0)$, $(0; 3)$ и построим прямую.

Ответ: $(0; 3)$; $(-4; 0)$.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 92; вопросы 18–20.

Решить задачи № 972 (в), 974, 976, 977.

Урок 22

Уравнение окружности и прямой. Решение задач

Цель урока:

- Совершенствование навыков решения задач методом координат.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Индивидуальная работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 20, 21, 24 – самостоятельно с последующей проверкой в ходе индивидуальной беседы учителя с учеником.

2. Решение задач

I уровень – устно № 960, 963, 965, 977, 967 (фронтальная работа с частью учащихся);

II уровень – самостоятельное решение задач с последующим обсуждением.

Задачи для II уровня

1. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y - x = 0$, $y + x = 0$, $y - 2x + 4 = 0$.

(Ответ: $5\frac{1}{3}$ кв. ед.)

2. Составьте уравнение прямой, если точка $C(3; 4)$ служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат на эту прямую.

(Ответ: $3x + 4y - 25 = 0$.)

Задача № 21

Какие из следующих уравнений задают окружность:

- а) $x^2 + (y - 1)^2 = 25$; б) $4x^2 + 4y^2 = 9$;
 в) $2x^2 + 2y^2 = 0$; г) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
 д) $(x + 2)^2 + y^2 - 0,01 = 0$; е) $x^2 - 2x + y = 3$?

Решение:

- а) Уравнение $x^2 + (y - 1)^2 = 25$ имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $a = 0$, $b = 1$, $r = 5 \neq 0$, следовательно, это уравнение задает окружность.
- б) Разделив обе части уравнения $4x^2 + 4y^2 = 9$ на 4, получим уравнение $x^2 + y^2 = 9/4$, которое имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $a = 0$, $b = 0$, $r = 3/2 \neq 0$. Следовательно, это уравнение задает окружность.
- в) Равенство $2x^2 + 2y^2 = 0$ выполняется только при $x = 0$, $y = 0$, т. е. данному уравнению удовлетворяют координаты только одной точки $(0; 0)$. Следовательно, это уравнение не задает окружность.
- г) Левая часть уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 0$ при любых значениях x и y больше нуля, а правая часть равна нулю. Поэтому точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, не существует. Следовательно, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не задает окружность.
- д) Перенеся слагаемое $(-0,01)$ в правую часть уравнения $(x + 2)^2 + y^2 - 0,01 = 0$, получим уравнение $(x + 2)^2 + y^2 = 0,01$, которое имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $a = -2$, $b = 0$, $r = 0,1 \neq 0$. Следовательно, уравнение $(x + 2)^2 + y^2 - 0,01 = 0$ задает окружность.
- е) Прибавив к обеим частям уравнения $x^2 - 2x + y = 3$ число 1, получим уравнение $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4$, которое можно записать в виде $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 4$, т. е. в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где $a = 1$, $b = 0$, $r = 2 \neq 0$. Следовательно, данное уравнение задает окружность.

Ответ: окружность задают уравнения а), б), д), е).

Задача № 20

Даны точки $A(-1; 2)$, $B(0; \sqrt{3})$, $C(1; -2)$, $D(2; -1)$.

Какие из этих точек лежат на линии L , заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$?

Решение: Точка лежит на линии, заданной уравнением с двумя переменными x и y , если ее координаты удовлетворяют этому уравнению, и не лежит на линии, если ее координаты не удовлетворяют уравнению линии.

Подставим координаты точек в уравнение $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$:

$(-1)^2 - 2(-1) + 2^2 - 3 = 1 + 2 + 4 - 3 = 0$. Координаты точки A не удовлетворяют данному уравнению, следовательно, точка A не лежит на линии L : $A \notin L$.

$0^2 - 2 \cdot 0 + (\sqrt{3})^2 - 3 = 0 - 0 + 3 - 3 = 0$. Следовательно, $C \in L$.

$2^2 - 2 \cdot 2 + (-1)^2 - 3 = 4 - 4 + 1 - 3 \neq 0$. Следовательно, $D \notin L$.

Ответ: $B, C \in L$.

Задача № 24

Напишите уравнение окружности радиуса r с центром в точке C , если:

а) $r = 2$ и $C(3; 0)$;

б) $r = 3$ и $C(0; -2)$;

в) $r = \sqrt{5}$ и $C(-2; 3)$.

Ответ: а) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$;

б) $x^2 + (y + 2)^2 = 9$;

в) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

III. Решение задач

1. Разобрать задачи № 980, 969 (а).

Задача № 980

Решение (рис. 146):

Так как диагонали лежат на осях координат, то вершины ромба $ABCD$ имеют координаты:

а) $A(-2; 0)$, $B(0; 5)$, $C(2; 0)$, $D(0; -5)$.

б) $A_1(-5; 0)$, $B_1(0; 2)$, $C_1(5; 0)$, $D_1(0; -2)$.

Рассмотрим случай а):

Напишем уравнение прямой AB :

$A(-2; 0) \Rightarrow -2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow a = 0,5c$;

$B(0; 5) \Rightarrow 0 \cdot a + 5b + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = -0,2c \Rightarrow 5x - 2y + 10 = 0$.

Напишем уравнение прямой BC :

$B(0; 5) \Rightarrow 0 \cdot a + 5b + c = 0 \Rightarrow b = -0,2c$;

$C(2; 0) \Rightarrow 2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -0,5c \Rightarrow 5x + 2y - 10 = 0$.

Напишем уравнение прямой CD :

$C(2; 0) \Rightarrow 2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow a = -0,5c$;

$D(0; -5) \Rightarrow 0 \cdot a - 5b + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 0,2c \Rightarrow 5x - 2y - 10 = 0$.

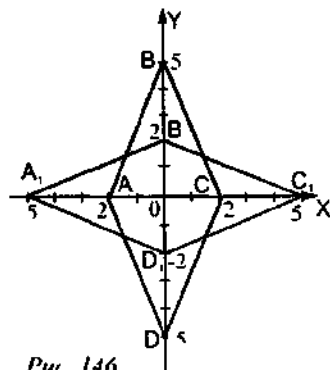


Рис. 146

Напишем уравнение прямой AD :

$$A(-2; 0) \Rightarrow -2a + 0 \cdot b + c = 0 \Rightarrow a = 0,5c;$$

$$D(0; -5) \Rightarrow 0 \cdot a - 5b + c = 0 \Rightarrow b = 0,2c \Rightarrow 5x + 2y + 10 = 0.$$

Случай 2) решается аналогично.

Ответ:

$$1) 5x - 2y + 10 = 0; 5x + 2y - 10 = 0; 5x - 2y - 10 = 0; 5x + 2y + 10 = 0.$$

$$2) 2x - 5y + 10 = 0; 2x + 5y - 10 = 0; 2x - 5y - 10 = 0; 2x + 5y + 10 = 0.$$

Наводящие вопросы:

- Как поместить ромб в прямоугольную систему координат, чтобы наиболее удобным способом определить координаты вершин ромба?
- Сколькими способами это можно сделать?
- Как написать уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты которых известны?

Задача № 969 (а)

Решение: Так как MN – диаметр окружности, то центр окружности (точка O) является серединой отрезка MN , тогда:

$$x_O = \frac{x_M + x_N}{2} = 2; y_O = \frac{y_M + y_N}{2} = 1 \Rightarrow O(2; 1).$$

Точка $M(-3; 5)$ лежит на окружности, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению окружности. Подставим координаты точек M и O в уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$:
 $(-3 - 2)^2 + (5 - 1)^2 = r^2 \Rightarrow 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow r^2 = 41.$

Уравнение окружности имеет вид: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 41.$

Ответ: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 41.$

Наводящие вопросы:

- Какой формулой задается уравнение окружности? Что вы можете сказать о точках $(x_0; y_0)$, $(x; y)$?
- Можно ли определить координаты центра окружности, если известны координаты концов диаметра MN ?
- Как вычислить радиус окружности, если известно, что точки M и N лежат на окружности, точка O – центр окружности, координаты точек M , N , O известны?
- Напишите уравнение окружности.

2. Решить самостоятельно задачу:

I уровень – № 968; II уровень – № 971.

Задача № 968

Решение:

Так как точка $A(0; 6)$ является центром окружности, то уравнение окружности имеет вид: $x^2 + (y - 6)^2 = r^2.$

Точка $B(-3; 2)$ лежит на данной окружности, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + (y - 6)^2 = r^2$, т. е. $(-3)^2 + (2 - 6)^2 = r^2$, тогда $r^2 = 9 + 16 = 25.$

Уравнение окружности имеет вид: $x^2 + (y - 6)^2 = 25$.

Ответ: $x^2 + (y - 6)^2 = 25$.

Задача № 971

Решение:

Так как точка $A(-3; 0)$ и $B(0; 9)$ лежат на окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению окружности.

Центр окружности лежит на оси ординат, значит, имеет координаты $(0; b)$, т. е. уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Подставим координаты точек A и B в данное уравнение, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (-3)^2 + (0 - b)^2 = r^2, \\ 0^2 + (9 - b)^2 = r^2. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим $b = 4$, $r^2 = 25$, тогда уравнение окружности примет вид: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Ответ: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Окружность с центром в точке $A(-5; 3)$ проходит через точку $B(2; -1)$. Напишите уравнение этой окружности.
2. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $B(-2; 4)$.
3. Выясните взаимное расположение прямой $x = -5$ и окружности $(x - 7)^2 + (y - 6)^2 = 81$.

II вариант

1. Окружность с центром в точке $M(2; -4)$ проходит через точку $N(-3; 1)$. Напишите уравнение этой окружности.
2. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $C(-6; -3)$.
3. Выясните взаимное расположение прямой $y = 25$ и окружности $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 100$.

II уровень

I вариант

1. Окружность проходит через точки $M(2; 0)$ и $N(-4; 8)$. Напишите уравнение этой окружности, если отрезок MN является ее диаметром.
2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 3)$ и $B(-2; -3)$.
3. Выясните взаимное расположение окружности, заданной уравнением $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$, и прямой $y = -1$.

II вариант

1. Окружность проходит через точки $P(8; -4)$ и $T(-2; 6)$. Напишите уравнение этой окружности, если известно, что PT – диаметр этой окружности.
2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(3; 5)$ и $N(-6; -1)$.
3. Выясните взаимное расположение окружности, заданной уравнением $(x+7)^2 + (y+4)^2 = 25$, и прямой $y = -7$.

III уровень**I вариант**

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 + 8x + y^2 - 6x - 24 = 0$, является уравнением окружности. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $(5; -6)$.
2. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и прямой, проходящей через точки $A(1; 10)$ и $B(-1; -4)$.
3. Выясните взаимное расположение прямой $x + y = 2$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

II вариант

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 - 10x + y^2 + 4x - 7 = 0$, является уравнением окружности. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $(-6; 4)$.
2. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и прямой, проходящей через точки $M(2; 9)$ и $N(-1; -3)$.
3. Выясните взаимное расположение прямой $x - y = 4$ и окружности $x^2 + y^2 = 16$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

Ответы к задачам самостоятельной работы**I уровень****I вариант**

1. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 65$.
2. $2x + y = 0$.
3. нет общих точек.

II вариант

1. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 50$.
2. $x - 2y = 0$.
3. нет общих точек.

II уровень**I вариант**

1. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$.
2. $2x - y + 1 = 0$.
3. Пересекаются в точках $(0; -1)$ и $(6; -1)$.

II вариант

1. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 50$.
2. $2x - 3y + 9 = 0$.
3. Пересекаются в точках $(-3; -7)$ и $(-11; -7)$.

III уровень**I вариант**

1. 9 ед.

2. $\frac{9}{14}$ кв. ед.3. Пересекаются в точках (0; 2) и (2; 0); $\sqrt{2}$.**II вариант**

1. 6 ед.

2. $\frac{1}{8}$ кв. ед.3. Пересекаются в точках (-4; 0) и (0; 4); $2\sqrt{2}$.**V. Подведение итогов урока****Домашнее задание**

Решить задачи:

I уровень – № 23 (из рабочей тетради), № 978, 979, 969 (6);*II уровень* – № 978, 979, 969 (6), 970.**Урок 23****Урок подготовки к контрольной работе****Цели урока:**

- Систематизация знаний, умений и навыков по теме «Метод координат».
- Подготовить учащихся к контрольной работе.
- Совершенствовать навыки решения задач методом координат.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся. Тест**

Цель тестирования – повторение теории метода координат. Тест проводится с последующей самопроверкой и обсуждением заданий, с которыми не справились учащиеся.

I вариант1. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, то:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$;

в) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

2. Если $\vec{a} = 5\vec{j} - 3\vec{i}$, то:

а) $\vec{a} \{5; -3\}$;

- б) $\vec{a}\{5; 3\}$;
в) $\vec{a}\{-3; 5\}$.
3. Если $A(2; -5)$, $B(-4; -2)$, то:
- а) $\overrightarrow{AB}\{-6; 3\}$;
б) $\overrightarrow{AB}\{6; -3\}$;
в) $\overrightarrow{AB}\{-2; -7\}$.
4. Если $\vec{x}\{3; -6\}$, $\vec{y}\{-2; 4\}$, $\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, то:
- а) $\vec{c}\{2; -4\}$;
б) $\vec{c}\{1; 1\}$;
в) $\vec{c}\{-2; 4\}$.
5. Если $\vec{x}\{2; -5\}$, $\vec{y}\{1; 2,5\}$, $\vec{z} = \left\{-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4}\right\}$, то коллинеарны векторы:
- а) $\vec{x}$ и $\vec{y}$;
б) $\vec{x}$ и $\vec{z}$;
в) $\vec{y}$ и $\vec{z}$.
6. Если AM – медиана треугольника ABC , $B(2; -5)$, $C(-6; 3)$, то:
- а) $M(-2; -1)$;
б) $M(4; -4)$;
в) $M(-4; 4)$.
7. Если $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$, то:
- а) $|\vec{a}| = 1$;
б) $|\vec{a}| = 5$;
в) $|\vec{a}| = \sqrt{7}$.
8. В треугольнике ABC $A(-2; 2)$, $B(2; 6)$, $C(4; -2)$. Если BM – медиана, то:
- а) $BM = \sqrt{37}$;
б) $BM = \sqrt{45}$;
в) $BM = \sqrt{35}$.
9. Если точки $C(-2; 1)$ и $D(6; 5)$ – концы диаметра окружности, то уравнение данной окружности имеет вид:
- а) $(x+2)^2 + (x+3)^2 = \sqrt{20}$;
б) $(x-4)^2 + (x-3)^2 = 12$;
в) $(x-2)^2 + (x-3)^2 = 20$.

10. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 1)$ и $B(2; 7)$, имеет вид:

а) $x - 2y + 3 = 0$;

б) $2x - y + 3 = 0$;

в) $2x + y - 3 = 0$.

II вариант

1. Если точки M, N, K лежат на одной прямой, то:

а) $\overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{NK}$;

б) $\overrightarrow{MN} \uparrow \downarrow \overrightarrow{NK}$;

в) $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{NK}$.

2. Если $\vec{b} \{-2; 7\}$, то:

а) $\vec{b} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$;

б) $\vec{b} = 7\vec{j} - 2\vec{i}$;

в) $\vec{b} = -2\vec{i} - 7\vec{j}$.

3. Если $M(-3; 4), N(-1; -5)$, то:

а) $\overrightarrow{MN} \{-4; -1\}$;

б) $\overrightarrow{MN} \{-2; 9\}$;

в) $\overrightarrow{MN} \{2; -9\}$.

4. Если $\vec{a} \{4; -2\}, \vec{b} \{6; -3\}, \vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, то:

а) $\vec{p} \{-4; 2\}$;

б) $\vec{p} \{4; -2\}$;

в) $\vec{p} \{4; 2\}$.

5. Если $\vec{a} \{3; -4\}, \vec{b} \{-0,75; 1\}, \vec{c} = \{-6; -8\}$, то коллинеарны векторы:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

в) $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

6. Если O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD, A(3; -7), C(-5; -1)$, то:

а) $O(4; -3)$;

б) $O(-1; -4)$;

в) $O(-4; 3)$.

7. Если $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$, то:

а) $|\vec{b}| = 2$;

б) $|\vec{b}| = \sqrt{28}$;

в) $|\vec{b}| = 10$.

8. В треугольнике MNK $M(-2; 4)$, $N(4; 6)$, $K(6; -2)$. Если MA – медиана, то:

а) $MA = \sqrt{85}$;

б) $MA = \sqrt{53}$;

в) $MA = \sqrt{45}$.

9. Если точки $A(-3; -3)$ и $B(5; 1)$ – концы диаметра окружности, то уравнение данной окружности имеет вид:

а) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$;

б) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 12$;

в) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 74$.

10. Уравнение прямой, проходящей через точки $C(-4; -4)$ и $D(6; 1)$, имеет вид:

а) $x - 2y - 2 = 0$;

б) $x + 2y + 2 = 0$;

в) $2x - y + 2 = 0$.

Ключи к тесту

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I вариант	б	в	а	в	б	а	б	а	в	б
II вариант	в	б	в	а	а	б	в	б	а	а

III. Решение задач

1. Обсуждение решения задач № 25, 29 из рабочей тетради.

Задача № 25

Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB , если $A(-3; 4)$, $B(1; -2)$.

Решение:

Если точка $M(x; y)$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то $AM = BM$, и поэтому $AM^2 = BM^2$. Запишем это равенство в координатах: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2$.

Раскрыв скобки, получим:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4.$$

Перенесем все слагаемые из правой части в левую часть равенства: $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - x^2 + 2x - 1 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

Приведем подобные члены: $8x - 12y + 20 = 0$.

Разделив обе части уравнения на 4, получим $2x - 3y + 5 = 0$.

Если точка $M(x; y)$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то ее координаты должны удовлетворять уравнению

$2x - 3y + 5 = 0$. Если же точка $M(x; y)$ не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то $AM^2 \neq BM^2$, и поэтому ее координаты не удовлетворяют полученному уравнению.

Итак, уравнение $2x - 3y + 5 = 0$ является уравнением серединного перпендикуляра к отрезку AB .

Ответ: $2x - 3y + 5 = 0$.

Задача № 29

Окружность и прямая заданы уравнениями $x^2 + (y - 4)^2 = 25$ и $x - 7y + 3 = 0$. Найдите длину хорды, отсекаемой окружностью на прямой.

Решение:

Чтобы найти координаты точек пересечения окружности и прямой, решим систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 = 25, \\ x - 7y + 3 = 0. \end{cases}$$

Последовательно получаем:

$$x = 7y - 3; (7y - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25;$$

$$49y^2 - 42y + y^2 - 8y + 16 = 25;$$

$$50y^2 - 50y = 0; y_1 = 0, y_2 = 1.$$

Соответственно находим $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$.

Итак, данные окружность и прямая пересекаются в точках $(-3; 0)$ и $(4; 1)$.

Искомая длина хорды равна:

$$\sqrt{(-3 - 4)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

IV. Самостоятельное решение задач

I уровень – № 19, 23, 27 (из рабочей тетради);

II уровень – № 1003, 1006.

Задача № 19

Даны точки $A(-2; -3)$ и $B(-3; 4)$, $C(4; 5)$.

1) Докажите, что в треугольнике ABC углы A и C равны.

2) Найдите площадь треугольника ABC .

Решение:

1) В треугольнике ABC углы A и C равны, если $BC = BA$. Так как $BC^2 = (-3 - 4)^2 + (4 - 5)^2 = 50$, $BA^2 = (-2 + 3)^2 + (-3 - 4)^2 = 50$, то $BC = BA$. Следовательно, $\angle A = \angle C$.

2) В данном равнобедренном треугольнике ABC основанием служит сторона AC , следовательно, медиана, проведенная из вершины B , является высотой треугольника. Найдём AC и медиану BM . $AC = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{100} = 10$. Так как точка M – середина стороны AC , то $M(1; 1)$ и поэтому $BM = \sqrt{(1 + 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Итак, $S_{ABC} = 0,5 \cdot BM = 0,5 \cdot 10 \cdot 5 = 25$.

Ответ: 25 кв. ед.

Задача № 23

Окружность задана уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Не пользуясь чертежом, установите, какие из точек $A(3; -2)$, $B(-4; 6)$ и $C(3; -1)$ лежат на окружности.

Первый способ решения:

Выясним, координаты каких точек удовлетворяют уравнению окружности.

$(3 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \neq 25$. Итак, координаты точки A не удовлетворяют данному уравнению, следовательно, точка A не лежит на окружности.

$(-4 + 1)^2 + (6 - 2)^2 = 9 + 16 = 25$. Итак, координаты точки B удовлетворяют данному уравнению, следовательно, точка B лежит на окружности.

$(3 + 1)^2 + (-1 - 2)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Итак, точка C лежит на окружности.

Второй способ решения:

Центр данной окружности – точка с координатами $(-1; 2)$, а радиус окружности равен 5. Найдем расстояние от центра данной окружности до каждой из данных точек и сравним их с радиусом окружности. Обозначим центр окружности буквой M , тогда:

$AM = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{16 + 16} \neq 5$, следовательно, точка A не лежит на окружности.

$BM = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно, точка B лежит на окружности.

$CM = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно, точка C лежит на окружности.

Ответ: На данной окружности лежат точки B и C .

Задача № 27

Даны координаты вершин треугольника: $A(-3; 0)$ и $B(1; 4)$, $C(3; 0)$.

Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, параллельную стороне AB .

Решение: Обозначим середины сторон BC и AC буквами K и M соответственно. Тогда $K(2; 2)$, $M(0; 0)$, а прямая KM – искомая. Запишем ее уравнение в виде $ax + by + c = 0$. Подставив координаты точек K и M в это уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0, \\ 0a + 0b + c = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует: $c = 0$ и $b = -a$, и поэтому искомое уравнение принимает вид: $ax - ay = 0$ или $x - y = 0$.

Ответ: $x - y = 0$.

Задача № 1003

- а) Пусть серединный перпендикуляр к стороне AB проходит через точку $E(x; y)$, тогда $AE^2 = BE^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x+7)^2 + (y-5)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 20x - 12y + 64 = 0 \Rightarrow 5x - 3y + 16 = 0$ – уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к стороне AB .

Пусть серединный перпендикуляр к стороне AC проходит через точку $P(x; y)$, тогда $AP^2 = CP^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+7)^2 + (y-5)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x - 4y + 40 = 0 \Rightarrow 6x - y + 10 = 0$$
 – уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к стороне AC .

Пусть серединный перпендикуляр к стороне BC проходит через точку $K(x; y)$, тогда $BK^2 = CK^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$$
 – уравнение серединного перпендикуляра, проведенного к стороне BC .

- б) Составим уравнение прямой AB .

$A(-7; 5)$ лежит на прямой $\Rightarrow -7a + 5b + c = 0$ (1),

$B(3; -1)$ лежит на прямой $\Rightarrow 3a - b + c = 0$ (2).

Из уравнений (1) и (2) выразим a через b и c и приравняем:

$$a = \frac{b-c}{3}; a = \frac{5b+c}{7} \Rightarrow \frac{b-c}{3} = \frac{5b+c}{7} \Rightarrow b = -\frac{5}{4}c \Rightarrow a = -\frac{3}{4}c.$$

Подставим a и b в уравнение прямой $ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4}cx - \frac{5}{4}cy + c = 0 \Rightarrow 3x + 5y - 4 = 0$$
 – уравнение прямой AB .

Составим уравнение прямой BC аналогичным способом:

$$\begin{cases} 3a - b + c = 0, \\ 5a + 3b + c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{b-c}{3}, \\ a = -\frac{3b+c}{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{7}c, \\ b = \frac{1}{7}c, \end{cases} \Rightarrow 2x - y - 7 = 0.$$

Составим уравнение прямой AC :

$$\begin{cases} -7a + 5b + c = 0, \\ 5a + 3b + c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5b+c}{7}, \\ a = -\frac{3b+c}{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{23}c, \\ b = -\frac{6}{23}c, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 6y - 23 = 0$$
 – уравнение прямой AC .

- в) Найдем середины сторон AB , BC , AC треугольника ABC – точки M , N и K соответственно: $M(-2; 2)$, $N(4; 1)$, $K(-1; 4)$.

Составим уравнение прямой MN :

$$\begin{cases} -2a + 2b + c = 0, \\ 4a + b + c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2b+c}{2}, \\ a = -\frac{b+c}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0,1c, \\ b = -0,6c, \end{cases} \Rightarrow x + 6y - 10 = 0.$$

Составим уравнение прямой NK :

$$\begin{cases} 4a + b + c = 0, \\ -a + 4b + c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b+c}{4}, \\ a = 4b+c, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{17}c, \\ b = \frac{5}{17}c, \end{cases} \Rightarrow 3x + 5y - 17 = 0.$$

Составим уравнение прямой MK :

$$\begin{cases} -2a + 2b + c = 0, \\ -a + 4b + c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2b+c}{2}, \\ a = 4b+c, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}c, \\ b = -\frac{1}{6}c, \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 6 = 0.$$

Ответ: а) $5x - 3y + 16 = 0$; $x + 2y - 6 = 0$; $6x - y + 10 = 0$.

б) $3x + 5y - 4 = 0$; $2x - y - 7 = 0$; $x + 6y - 23 = 0$.

в) $3x + 5y - 17 = 0$; $2x - y + 6 = 0$; $x + 6y - 10 = 0$.

Задача № 1006

1 случай (рис. 147): Поместим данный треугольник в прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке.

Из прямоугольного $\triangle OBC$ $OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$, тогда $AO = 28 - 8 = 20$.

Точки A , B , C имеют координаты $A(-20; 0)$, $B(0; 15)$, $C(8; 0)$.

Найдем медианы треугольника.

1) Пусть AK – середина BC , тогда $K(4; 7,5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow AK = \sqrt{(4+20)^2 + (7,5-0)^2} = \sqrt{24^2 + 7,5^2} = \frac{\sqrt{2529}}{2} \text{ (см).}$$

2) Пусть M – середина AB , тогда $M(-10; 7,5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow CM = \sqrt{(-10-8)^2 + (7,5-0)^2} = \sqrt{324 + 56,25} = 19,5 \text{ (см).}$$

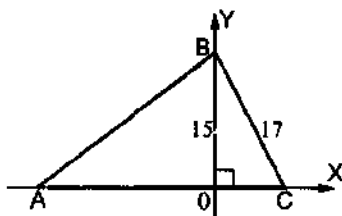


Рис. 147

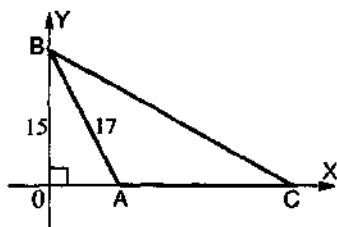


Рис. 148

3) Пусть N – середина AC , тогда $N(-6; 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow BN = \sqrt{(-6-0)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{261} \text{ (см)}.$$

II случай (рис. 148): рассуждая аналогично, имеем $OA = 8$, $OC = 36$, тогда $A(8; 0)$, $B(0; 15)$, $C(36; 0)$.

1) $K(18; 7,5)$ – середина BC .

$$AK = \sqrt{(18-8)^2 + (7,5-0)^2} = 12,5 \text{ (см)}.$$

2) M – середина $AB \Rightarrow M(4; 7,5)$

$$CM = \sqrt{(4-36)^2 + (7,5-0)^2} = \frac{\sqrt{4321}}{2} \text{ (см)}.$$

3) N – середина $AC \Rightarrow N(22; 0)$

$$BN = \sqrt{(22-0)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{709} \text{ (см)}.$$

Ответ: 1) $\frac{\sqrt{2529}}{2}$ см; 19,5 см; $\sqrt{261}$ см или

2) 12,5 см; $\frac{\sqrt{4321}}{2}$ см; $\sqrt{709}$ см.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи:

I уровень – № 990, 992, 993, 996.

II уровень – № 998, 999, 1001, 1002.

Урок 24

Контрольная работа по теме «Метод координат»

I уровень

I вариант

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{m} - \vec{n}$,

$$\vec{m} \{-3; 6\}, \vec{n} \{2; -2\}.$$

2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $A(-3; 2)$, проходящей через точку $B(0; -2)$.

3. Треугольник MNK задан координатами своих вершин: $M(-6; 1)$, $N(2; 4)$, $K(2; -2)$.

а) Докажите, что $\triangle MNK$ – равнобедренный.

б) Найдите высоту, проведенную из вершины M .

4*. Найдите координаты точки N , лежащей на оси абсцисс и равноудаленной от точек $P(-1; 3)$ и $K(0; 2)$.

II вариант

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{b}$, если $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}$,
 $\vec{m}\{6; -2\}$, $\vec{d}\{1; -2\}$.
2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(2; 1)$, проходящей через точку $D(5; 5)$.
3. Треугольник CDE задан координатами своих вершин. $C(2; 2)$, $D(6; 5)$, $E(5; -2)$.
 - а) Докажите, что $\triangle CDE$ – равнобедренный.
 - б) Найдите биссектрису, проведенную из вершины C .
- 4*. Найдите координаты точки A , лежащей на оси ординат и равноудаленной от точек $B(1; -3)$ и $C(2; 0)$.

II уровень**I вариант**

1. В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a}\{3; -2\}$ и $\vec{b}\{1; -2\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{a} - 9\vec{b}$ и его длину. Постройте вектор $\vec{c}$, если его конец совпадает с точкой $M(3; 2)$.
2. Выясните, принадлежит ли точка $A(1; \sqrt{3})$ окружности с центром в точке $B(5; 0)$ и радиусом, равным $\sqrt{19}$?
3. Докажите, что четырехугольник $MNKP$, заданный координатами своих вершин $M(2; 2)$, $N(5; 3)$, $K(6; 6)$, $P(3; 5)$, является ромбом и вычислите его площадь.
- 4*. В равнобедренном треугольнике основание равно 12 см, а высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

II вариант

1. В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a}\{-3; 2\}$ и $\vec{b}\{1; -1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и его длину. Постройте вектор $\vec{c}$, если его конец совпадает с точкой $M(1; 4)$.
2. Выясните, принадлежит ли точка $C(2; \sqrt{5})$ окружности с центром в точке $D(7; 0)$ и радиусом, равным $\sqrt{30}$?
3. Докажите, что четырехугольник $PSQT$, заданный координатами своих вершин $P(3; 0)$, $S(-1; 3)$, $Q(-4; -1)$, $T(0; -4)$, является квадратом и вычислите его площадь.
- 4*. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а биссектриса, проведенная к основанию, равна 18 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

III уровень

I вариант

1. Определите значение x , при котором вектор $\vec{a}\{2-x; 2x+3\}$ коллинеарен вектору $\vec{b}\{-2; 5\}$.
2. Используя метод координат, решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4, \\ (x-9)^2 + (y-8)^2 = 64. \end{cases}$$
3. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина BC , D – середина CP , M лежит на отрезке BP и $BM:MP = 1:3$. Разложите по векторам $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ следующие векторы: а) $\vec{DB}$; б) $\vec{KA}$; в) $\vec{BP}$; г) $\vec{AM}$.
- 4*. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD = 5$, $BC = CD = 3\sqrt{2}$, $AC = 7$. Применив метод координат, найдите расстояние между серединами противоположных сторон четырехугольника $ABCD$.

II вариант

1. Определите значение x , при котором вектор $\vec{a}\{-4-2x; 3x+2\}$ коллинеарен вектору $\vec{b}\{3; -4\}$.
2. Используя метод координат, решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y+3)^2 = 9, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4. \end{cases}$$
3. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина DC , D – середина AE , точка K лежит на отрезке CE и $CK:KE = 1:2$. Разложите по векторам $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ следующие векторы: а) $\vec{CA}$; б) $\vec{AM}$; в) $\vec{BE}$; г) $\vec{BK}$.
- 4*. В параллелограмме стороны равны 10 и 20 см, острый угол равен 60° . Применив метод координат, найдите диагонали параллелограмма.

Ответы к задачам контрольной работы

I уровень

I вариант

1. $\vec{a}\{-3; 4\}$, $|\vec{a}| = 5$.
2. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$.
3. б) 8 ед.
4. $N(-3; 0)$.

II вариант

1. $\vec{b}\{4; -3\}$, $|\vec{b}| = 5$.
2. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.
3. б) $\sqrt{12,5}$ ед.
4. $A(0; -1)$.

II уровень

I вариант

1. $\vec{c}\{6; 8\}, |\vec{c}|=10$.

2. да.

3. 8 кв. ед.

4. $\sqrt{97}$ см.*II вариант*

1. $\vec{c}\{-7; 5\}, |\vec{c}|=\sqrt{74}$.

2. да.

3. 25 кв. ед.

4. 15 см.

III уровень

I вариант

1. $x=16$.

2. $(2,6; 3,2)$.

3. а) $-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$;

в) $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}$;

г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

4. $\frac{\sqrt{85}}{2}$.

II вариант

1. $x=10$

2. $(-2,2; -0,6)$.

3. а) $-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;

б) $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

в) $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$;

г) $\frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

4. $10\sqrt{7}$ см, $10\sqrt{3}$ см.

Домашнее задание

Повторить пп. 66, 67 (с. 156–159).

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

В данной главе вводятся понятия синуса, косинуса и тангенса углов от 0° до 180° , рассматриваются теоремы синусов и косинусов. Здесь же введено скалярное произведение векторов и рассмотрены его свойства.

Основная цель данной главы – развитие тригонометрического аппарата как средства решения геометрических задач; знакомство учащихся с основными алгоритмами решения произвольных треугольников. Кроме этого, учащимся необходимо показать, как применяется скалярное произведение векторов при решении задач. В этой же главе идет знакомство еще с одной формулой площади треугольника.

Урок 25

Синус, косинус и тангенс угла

Цели урока:

- Ввести понятия синуса, косинуса и тангенса для углов от 0° до 180° .
- Вывести основное тригонометрическое тождество и формулы для вычисления координат точки.
- Рассмотреть формулы приведения $\sin(90^\circ - \alpha)$, $\cos(90^\circ - \alpha)$, $\sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos(180^\circ - \alpha)$.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Анализ ошибок контрольной работы

III. Тест с последующей самопроверкой

I вариант

1. Рис. 149. Синус угла A равен:

а) $\frac{4}{5}$;

б) $\frac{3}{5}$;

в) $\frac{4}{3}$.

2. Тангенс угла B равен:

а) $\frac{4}{3}$;

б) $\frac{3}{5}$;

в) $\frac{3}{4}$.

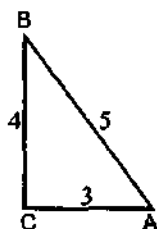


Рис 149

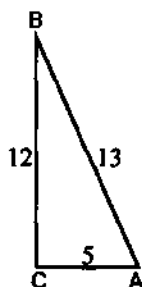


Рис 150

3. Косинус 60° равен:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\frac{1}{2}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Если $\sin \alpha = \frac{5}{9}$, то $\cos \alpha$ равен:

а) $\frac{9}{5}$;

б) $\frac{56}{81}$;

в) $\frac{2\sqrt{14}}{9}$.

5. Если $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, то $\operatorname{tg} \alpha$ равен:

а) $2\sqrt{2}$;

б) 8;

в) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\sin \angle A = \frac{2}{5}$. Найдите $\sin \angle B$.

а) $\frac{5}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{21}}{5}$;

в) $\frac{21}{25}$.

7. Упростите выражение: $\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$;

б) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

II вариант

1. Рис. 150. Косинус угла B равен:

а) $\frac{5}{13}$;

б) $\frac{12}{13}$;

в) $\frac{12}{5}$.

2. Тангенс угла A равен:

а) $\frac{12}{5}$;

б) $\frac{5}{12}$;

в) $\frac{12}{13}$.

3. Синус 30° равен:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{1}{2}$.

4. Если $\cos \alpha = \frac{4}{7}$, то $\sin \alpha$ равен:

а) $\frac{\sqrt{33}}{97}$;

б) $\frac{33}{49}$;

в) $\frac{7}{4}$.

5. Если $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, то $\operatorname{tg} \alpha$ равен:

а) $\frac{\sqrt{2}}{3}$;

б) $\frac{3}{7}$;

в) $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\sin \angle A = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos \angle B$.

а) $\frac{5}{3}$;

б) $\frac{4}{5}$;

в) $\frac{16}{25}$.

7. Упростите выражение: $\cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$

а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$;

б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$;

в) $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Ключи к тесту

	1	2	3	4	5	6	7
<i>I вариант</i>	а	в	б	в	а	б	а
<i>II вариант</i>	б	а	в	а	в	б	в

IV. Изучение нового материала

1. Ввести понятия синуса, косинуса, тангенса для углов от 0° до 180° , используя единичную полуокружность (см. рис. 151, рис. 152).

$$\sin \alpha = \frac{MM_1}{OM} = \frac{y}{1} = y;$$

$$\sin \alpha = y; \quad 0 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

$$\cos \alpha = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{1} = x;$$

$$\cos \alpha = x; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ).$$

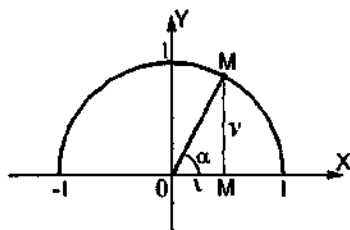


Рис 151

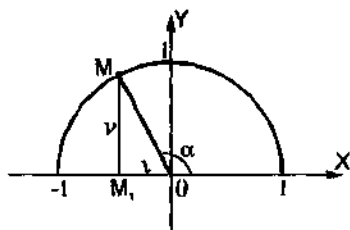


Рис 152

$\triangle OMM_1$ – прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора:

$$OM_1^2 + MM_1^2 = OM^2$$

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\cos \alpha + \sin \alpha = 1$$

2. Формулы приведения:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

3. Составить таблицу значений синуса, косинуса и тангенса для углов $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$									
$\cos \alpha$									
$\operatorname{tg} \alpha$									

Значения синуса, косинуса, тангенса для углов от 0° до 90° учащиеся заполняют самостоятельно (это материал 8 класса). Значения синуса, косинуса, тангенса для углов $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ заполняют с помощью учителя, используя формулы приведения, единичную полуокружность и формулы $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Например:

$$\text{а) } \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

в) $\sin 180^\circ = 0$ (ордината точки M при повороте радиуса OM на 180° от положительной полуоси Ox равна 0).

4. Вывести формулы для вычисления координат точки (рис. 153).

$$\overrightarrow{OM} \{ \cos \alpha; \sin \alpha \}$$

$$\overrightarrow{OA} = OA \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$x = OA \cdot \cos \alpha; y = OA \cdot \sin \alpha$$

$$\overrightarrow{OA} \{ OA \cos \alpha; OA \sin \alpha \}$$

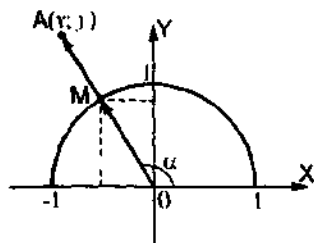


Рис. 153

V. Закрепление изученного материала

1. Разобрать решение задач № 30 (а), 31 (а) из рабочей тетради.

2. Решить самостоятельно № 30 (б, в, г), 31 (б, в) из рабочей тетради.

Задача № 30

Найдите по рисунку синус, косинус и тангенс угла:

- а) $\angle AOM$;
- б) $\angle AOK$;
- в) $\angle AOC$;
- г) $\angle AOB$.

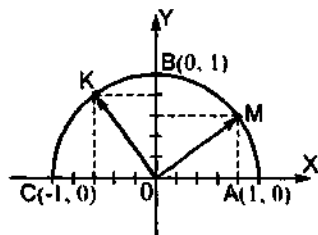


Рис. 154

Решение (рис. 154):

- а) Угол $\angle AOM$ образован лучом OM и положительной полуосью абсцисс, точка M лежит на единичной полуокружности. Значит, синус угла $\angle AOM$ равен ординате точки M , т. е. $\sin \angle AOM = 0,6$. Косинус угла $\angle AOM$ равен абсциссе точки M , т. е. $\cos \angle AOM = 0,8$.

Тангенс $\angle AOM$ равен $\frac{\sin \angle AOM}{\cos \angle AOM}$, т. е. $\operatorname{tg} \angle AOM = AM : OA = \frac{3}{4}$.

- б) Синус угла $\angle OAK$ равен ординате точки K , т. е. $\sin \angle AOK = 0,8$. Косинус угла $\angle AOK$ равен абсциссе точки K , т. е. $\cos \angle AOK = -0,6$.

Тангенс угла $\angle AOK$ равен $\frac{\sin \angle AOK}{\cos \angle AOK}$, т. е. $\operatorname{tg} \angle AOK = -\frac{4}{3}$.

- в) $\sin \angle AOC = 0$; $\cos \angle AOC = -1$; $\operatorname{tg} \angle AOC = 0$.
г) $\sin \angle AOB = 1$; $\cos \angle AOB = 0$; тангенс угла $\angle AOB$ не существует, так как $\cos \angle AOB = 0$.

Ответ:

- а) $\sin \angle AOM = 0,6$; $\cos \angle AOM = 0,8$; $\operatorname{tg} \angle AOM = \frac{3}{4}$.
б) $\sin \angle OAK = 0,8$; $\cos \angle AOK = -0,6$; $\operatorname{tg} \angle AOK = -\frac{4}{3}$.
в) $\sin \angle AOC = 0$; $\cos \angle AOC = -1$; $\operatorname{tg} \angle AOC = 0$.
г) $\sin \angle AOB = 1$; $\cos \angle AOB = 0$; $\operatorname{tg} \angle AOB$ не существует.

Задача № 31

Принадлежит ли единичной полуокружности точка:

- а) $P(-0,6; 0,8)$; б) $T\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$; в) $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

Решение:

Точка с координатами $(x; y)$ принадлежит единичной полуокружности, если выполнены два условия: 1) $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ и 2) $x^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим данные точки.

- а) Точка P : $x = -0,6$, $y = 0,8$ удовлетворяют первому условию: $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$; $x^2 + y^2 = (-0,6)^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1$,

следовательно, выполнено второе условие. Поэтому точка P принадлежит единичной полуокружности.

- б) Точка T : $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, следовательно, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

Следовательно, второе условие не выполнено. Поэтому точка T не принадлежит единичной полуокружности.

- в) Точка H : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Итак,

первое условие выполнено. $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Вы-

полнено второе условие. Поэтому точка H принадлежит единичной полуокружности.

Ответ:

- а) принадлежит;
б) не принадлежит;
в) принадлежит.

3. Решить самостоятельно задачи № 1012, 1013, 1015 (а, в).

Задача № 1012

Решение:

Точка с координатами $(x; y)$ принадлежит единичной полуокружности, если выполняются условия: $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ и $x^2 + y^2 = 1$. Точка $M_1(0; 1)$ удовлетворяет всем условиям $\Rightarrow$ она лежит на единичной полуокружности.

Точка $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ удовлетворяет всем условиям $\Rightarrow$ она лежит на единичной полуокружности.

Точки $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ также лежат на единичной полуокружности.

Синус $\angle AOM$ – это ордината точки M . Косинус $\angle AOM$ – это абсцисса точки M . Тангенс $\angle AOM$ равен отношению синуса $\angle AOM$ к его косинусу.

$$M_1(0; 1) \Rightarrow \sin \angle AOM_1 = 1, \cos \angle AOM_1 = 0, \operatorname{tg} \angle AOM_1 = 0$$

$$M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \sin \angle AOM_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \angle AOM_2 = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \angle AOM_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

$$M_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \sin \angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

$$M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin \angle AOM_4 = \frac{1}{2}, \cos \angle AOM_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \angle AOM_4 = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача № 1013

Решение: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, но так как

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{а) } \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{б) } \cos \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{в) } \cos \alpha = -1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - 1} = 0.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; в) 0.

Задача № 1015

Решение:

$$\text{а) } \cos \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 1} = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha = 0 : 1 = 0.$$

$$\text{б) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Так как } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Ответ: а) 0; б) 1.

VI. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Пп. 93–95, вопросы 1–6.

Решить задачи:

I уровень – № 32 (из рабочей тетради), № 1011, 1014, 1015 (б, г).

II уровень – № 1011, 1014, 1015 (б, г), дополнительную задачу.

Дополнительная задача

Точка B единичной полуокружности имеет координаты:

$$\text{а) } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad \text{б) } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right); \quad \text{в) } \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Найдите угол, который образует луч OB с положительной полуосью Ox .

Урок 26**Синус, косинус и тангенс угла****Цели урока:**

- Совершенствовать навыки нахождения синуса, косинуса и тангенса для углов от 0° до 180° .
- Развивать умение пользоваться основным тригонометрическим тождеством и находить координаты точки.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся**

1. Теоретический опрос по вопросам 1–6.
2. Решение задач на повторение.
 - а) Индивидуальная работа по решению задачи № 33 из рабочей тетради (I уровень).
 - б) Индивидуальная работа по карточкам.
 - в) Самостоятельное решение дополнительных задач № 1, 2 (II уровень).

I уровень (карточка № 1)

1. Выясните, принадлежат ли единичной полуокружности точки

$$A\left(-\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), C\left(-\frac{1}{5}; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right), D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)?$$

2. Найдите синус, косинус, тангенс углов AOB и AOC , если

$$A(1; 0), B\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right), C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), O - \text{начало координат.}$$

3. Найдите:

$$\text{а) } \sin \alpha, \text{ если } \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \alpha, \text{ если } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

II уровень (карточка № 2)

1. Найдите угол BOC , если O – начало координат, а координаты точек $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
2. Найдите:
 - а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.
 - б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{7}$.
 - в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{8}$.
3. Вычислите синусы, косинусы и тангенсы углов 45° и 120° .

III уровень (карточка № 3)

1. Найдите координаты точки C , если известно, что $\angle BOC = 60^\circ$, O – начало координат, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а точка C лежит на единичной полуокружности.
2. Найдите:
 - а) $\operatorname{tg}\alpha : \cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.
 - б) $\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$.
 - в) $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$.
3. Найдите значение выражения $\sin 150^\circ \cdot \cos^2 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$.

Задача № 33

Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

- 1) Используя основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ получаем: } \sin^2\alpha + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1, \text{ откуда}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \text{ Так как } -1 \leq \sin\alpha \leq 1, \text{ то } \sin\alpha = \pm \frac{1}{2}.$$

2) По определению $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Дополнительные задачи

- Вычислите:
 - $(\cos 135^\circ)^2 - \sin 150^\circ$.
 - $\operatorname{tg} 260^\circ + \operatorname{tg} 430^\circ$.
 - $\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \sin^2 45^\circ$.
- Найдите угол $\angle COD$, если точка C лежит на положительной полуоси OY , а точка D имеет координаты $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- Найдите:
 - $\sin \alpha$, если $|\cos \alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{7}$.
- Постройте угол A , если:
 - $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$;
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$;
 - $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{7}$.
- Найдите координаты вершин треугольника, если известно, что они лежат на единичной полуокружности, а его углы относятся как 1 : 2 : 3.

III. Решение задач

1. Решить задачи № 1017 (б), 1018 (а) в малых группах, варианты решений обсудить.

2. Решить самостоятельно задачи:

I уровень – № 37 (из рабочей тетради), № 1018 (в, д), 1019 (б, г).

II уровень – № 1018 (в, д), 1019 (б, г), дополнительные задачи № 3, 4.

Задача № 1017 (б)

Решение (рис. 155):

Т. к. косинус угла – это отношение прилежащего катета к гипотенузе и $\cos A = \frac{3}{4}$, то для построения $\angle A$ нужно построить прямоугольный $\triangle ABC$, в котором $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 4$.

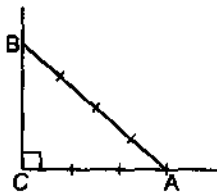


Рис. 155

Наводящие вопросы:

- Что называют косинусом угла прямоугольного треугольника?
- Пусть мы имеем прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\cos \angle A = \frac{3}{4}$. Что можно сказать о сторонах этого треугольника?
- Как построить прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза равна 4 единичным отрезкам, а один из его катетов – 3 единичным отрезкам?
- Укажите угол, косинус которого равен $\frac{3}{4}$.

Задача № 1018

Решение:

Если точка A имеет координаты $(x; y)$, то $x = OA \cdot \cos \alpha$, а $y = OA \cdot \sin \alpha$.

$$\text{а) } OA = 3, \alpha = 45^\circ \Rightarrow x = 3 \cdot \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}; y = 3 \cdot \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Т. е. } A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{в) } OA = 5, \alpha = 150^\circ \Rightarrow x = 5 \cdot \cos 150^\circ = -\frac{5\sqrt{3}}{2}; y = 5 \cdot \sin 150^\circ = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Т. е. } A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

$$\text{д) } OA = 2; \alpha = 30^\circ \Rightarrow x = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}; y = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \Rightarrow A(\sqrt{3}; 1).$$

$$\text{Ответ: а) } A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right); \text{ в) } A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right); \text{ д) } A(\sqrt{3}; 1).$$

Задача № 1019

Решение:

Координаты точки A можно вычислить по формулам:

$$x = OA \cdot \cos \alpha, y = OA \cdot \sin \alpha.$$

В прямоугольной системе координат HOY для координат точки A выполняется равенство $x^2 + y^2 = OA^2$.

б) $A(0; 3)$, тогда $0^2 + 3^2 = OA^2 \Rightarrow OA = 3$. Отсюда по формуле $x = OA \cdot \cos \alpha$ получаем: $0 = 3 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$.

г) $A(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \Rightarrow (-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = OA^2$, тогда $OA^2 = 16 \Rightarrow OA = 4$.

Тогда по формуле $x = OA \cdot \cos \alpha$ получаем:

$$-2\sqrt{2} = 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135^\circ.$$

Ответ: б) 90° ; г) 135° .

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи:

I уровень – № 34 (из рабочей тетради), № 1017 (а; в), 1018 (б; г), 1019 (а; в).

II уровень – № 1017 (а; в), 1018 (б; г), 1019 (а; в), дополнительную задачу № 5.

Урок 27

Синус, косинус и тангенс угла

Цели урока:

- Совершенствование умений находить синусы, косинусы, тангенсы для углов от 0° до 180° , применять основное тригонометрическое тождество и вычислять координаты точки.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Решение задач на готовых чертежах

Решение проводится с последующей самопроверкой и обсуждением решения тех задач, с которыми не справились большинство учащихся.

1. Рис. 156. *Найти:* x ; y .
2. Рис. 157. *Найти:* $\angle COA$; $\angle COB$.
3. Рис. 158. *Найти:* $\angle COD$.
4. Рис. 159. *Найти:* α , β .
5. Рис. 160. *Найти:* координаты точек A и B .
6. Рис. 161. *Найти:* $S_{\Delta BO}$.

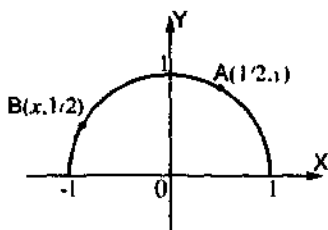


Рис. 156

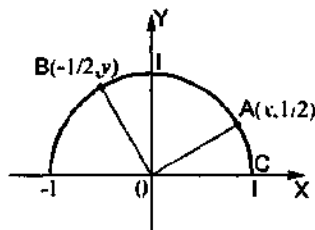


Рис. 157

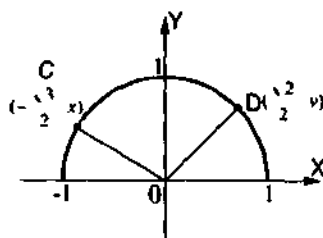


Рис 158

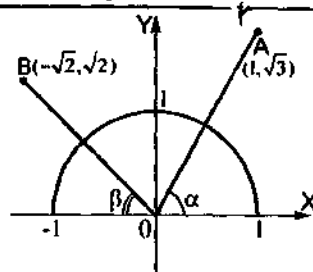


Рис 159

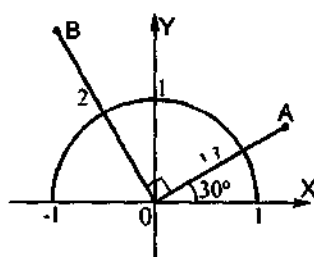


Рис 160

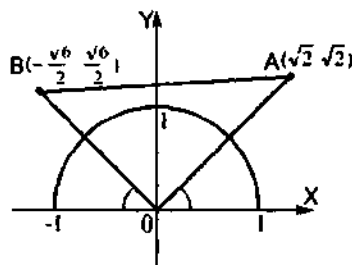


Рис 161

Ответы к задачам на готовых чертежах:

- $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\angle COA = 30^\circ, \angle COB = 120^\circ.$
- $\angle COD = 105^\circ.$
- $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ.$
- $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B(-1; \sqrt{3}).$
- $S_{ABO} = \sqrt{3}$ кв. ед.

III. Проверка домашнего задания

Индивидуально проверить домашнее задание (пока учащиеся решают задачи на готовых чертежах).

Задача № 1017

Решение (рис. 162):

а) $\sin A = \frac{2}{3}.$

б) $\cos A = -\frac{2}{5}.$

в) $\cos \alpha = \frac{2}{5}.$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$

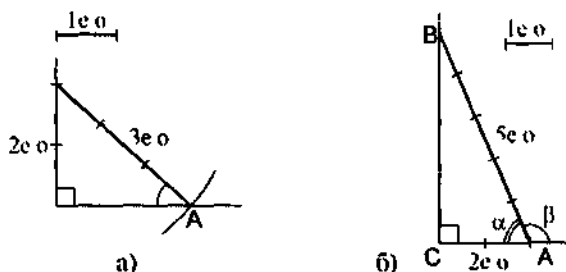


Рис. 162

$$\beta = 180^\circ - \alpha.$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha = -\frac{2}{5}.$$

Задача № 1018*Решение:*

$$x = OA \cdot \cos \alpha; y = OA \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{б) } OA = 1,5; \alpha = 90^\circ \Rightarrow x = 1,5 \cdot \cos 90^\circ; y = 1,5 \cdot \sin 90^\circ = 1,5 \Rightarrow A(0; 1,5).$$

$$\text{г) } OA = 1; \alpha = 180^\circ \Rightarrow x = 1 \cdot \cos 180^\circ = -1; y = 1 \cdot \sin 180^\circ = 0 \Rightarrow A(-1; 0).$$

Ответ: б) $A(0; 1,5)$, г) $A(-1; 0)$.

Задача № 1019*Решение:*

$$\text{а) } A(2; 2) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + 4 = 8 = OA^2 \Rightarrow OA = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{по формуле}$$

$$x = OA \cdot \cos \alpha \text{ имеем } 2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

$$\text{в) } A(-\sqrt{3}; 1) \Rightarrow x^2 + y^2 = (-\sqrt{3})^2 + 1 = 4 = OA^2 \Rightarrow OA = 2.$$

$$\text{По формуле } x = OA \cdot \cos \alpha \text{ имеем } -\sqrt{3} = 2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = 150^\circ.$$

Ответ: а) 45° ; в) 150° .

Дополнительная задача № 5*Решение:*

$$\text{Т. к. в } \triangle ABC \angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3, \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ.$$

Т. к. прямой угол опирается на диаметр, то возможны два случая (см. рис. 163 а, б):

1 случай:

$$\triangle ACO - \text{равносторонний} \Rightarrow \angle AOC = 60^\circ \Rightarrow \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow$$

$$C(\cos 120^\circ; \sin 120^\circ), \text{ т. е. } C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), A(-1; 0), B(1; 0).$$

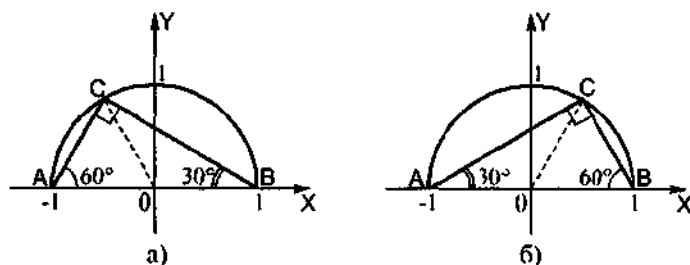


Рис. 163

2 случай:

$\triangle BCO$ – равносторонний $\Rightarrow \angle BOC = 60^\circ \Rightarrow C(\cos 60^\circ; \sin 60^\circ)$,
т. е. $C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$ или $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$.

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Найдите:

а) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

б) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2}{5}$.

в) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

2. Проверьте, лежат ли на единичной окружности точки:

а) $A\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$; б) $B(7; 3)$; в) $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3. Угол между лучом OM , пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью Ox равен α . Найдите координаты точки M , если:

а) $OM = 4$; $\alpha = 60^\circ$;

б) $OM = 8$; $\alpha = 150^\circ$.

II вариант

1. Найдите:

а) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

б) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$.

в) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Проверьте, лежат ли на единичной окружности точки:

а) $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; б) $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $C(2; 3)$.

3. Угол между лучом OP , пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью Ox равен β . Найдите координаты точки P , если:

а) $OP = 6$; $\beta = 30^\circ$; б) $OP = 10$; $\beta = 120^\circ$.

II уровень

I вариант

1. Найдите синус, косинус и тангенс угла AOM , если O – начало координат, а точки $A(1; 0)$, $M(-1/5; y)$ лежат на единичной полуокружности.
2. Упростите выражение:
а) $\sin 60^\circ \cdot \cos 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$;
б) $\cos 60^\circ - 2\sin^2 135^\circ + \cos^2 150^\circ$.
3. Найдите угол между лучом OM и положительной полуосью Ox , если точка M имеет координаты: а) $(-4; 4)$; б) $(3\sqrt{3}; 3)$.

II вариант

1. Найдите синус, косинус и тангенс угла BOP , если O – начало координат, а точки $B(1; 0)$ и $P(-3/4; y)$ лежат на единичной полуокружности.
2. Упростите выражение:
а) $\cos 180^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ$;
б) $\cos 45^\circ - \sin^2 150^\circ + \cos 120^\circ$.
3. Найдите угол между лучом OP и положительной полуосью Ox , если точка P имеет координаты: а) $(-2; 2\sqrt{3})$; б) $(3\sqrt{3}; 3)$.

III уровень

I вариант

1. Постройте угол A , если $\cos \angle A = -\frac{4}{7}$. Найдите $\sin \angle A$, $\operatorname{tg} \angle A$.
2. Найдите значение выражения $\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - \cos^2 \alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.
3. Найдите наименьший угол между лучами OA и OB , если $A(-2; 2\sqrt{3})$, $B(5; 5)$, O – начало координат.

II вариант

1. Постройте угол B , если $\cos \angle B = -\frac{5}{8}$. Найдите $\sin \angle B$, $\operatorname{tg} \angle B$.
2. Найдите значение выражения $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.
3. Найдите наименьший угол между лучами OC и OD , если $C(-3\sqrt{3}; 3)$, $D(7; 7)$, O – начало координат.

Ответы к задачам самостоятельной работы**I уровень****I вариант**

1. а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\pm \frac{\sqrt{21}}{5}$; в) $\sqrt{3}$.
2. а) да; б) нет; в) нет.
3. а) $M(2; 2\sqrt{3})$; б) $M(-4\sqrt{3}; 4)$.

II вариант

1. а) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $\pm \frac{\sqrt{5}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. а) да; б) нет; в) нет.
3. а) $P(3\sqrt{3}; 3)$; б) $P(-5\sqrt{3}; 5)$.

II уровень**I вариант**

1. $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$; $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{6}$.
2. а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{1}{4}$.
3. а) 135° ; б) 30° .

II вариант

1. $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.
2. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{4}$.
3. а) 120° ; б) 45° .

III уровень**I вариант**

1. $\sin \angle A = \frac{\sqrt{33}}{7}$; $\operatorname{tg} \angle A = -\frac{\sqrt{33}}{4}$.

2. $-\frac{7}{8}$.

3. 75° .

II вариант

1. $\sin \angle B = \frac{\sqrt{39}}{8}$; $\operatorname{tg} \angle B = -\frac{\sqrt{39}}{5}$.

2. $\frac{1}{45}$.

3. 105° .

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Решить задачи:

I уровень – задачу № 35 из рабочей тетради, задачи II или III уровня самостоятельной работы по усмотрению учителя.*II уровень* – задачи III уровня самостоятельной работы.**Урок 28****Теорема о площади треугольника****Цели урока:**

- Доказать теорему о площади треугольника.
- Научить учащихся решать задачи на применение теоремы о площади треугольника.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Анализ ошибок самостоятельной работы****III. Актуализация знаний. Повторение теории**

(Фронтальная работа с классом.)

– Рис. 164. Какие формулы используются для вычисления координат точки A ? (Ответ: $x = OA \cdot \cos \alpha$; $y = OA \cdot \sin \alpha$.)

– Какие формулы используются для вычисления площади: а) треугольника; б) параллелограмма?

Ответ:

а) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, где h_a – высота, проведенная к стороне a ; для прямоугольного треугольника $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab$, где a и b – катеты;

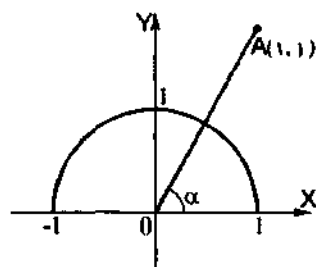


Рис 164

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – стороны треугольника, p – полупериметр (формула Герона).

б) $S_{\text{параллелограмма}} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, где h_a – высота, проведенная к стороне a .

IV. Решение задач

(Фронтальная работа с классом.)

1. Рис. 165. Вычислите координаты точек A и B , если $OA = 2$, $OB = \sqrt{3}$, $\angle BOC = 60^\circ$, $OB \perp OA$.

Ответ: $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

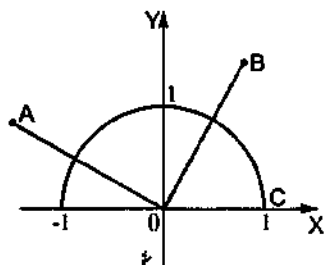


Рис 165

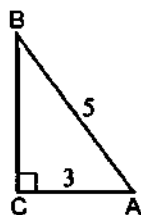
2. Вычислите площадь треугольника, изображенного на рисунке:
- Рис. 166 а);
 - Рис. 166 б);
 - Рис. 166 в);
 - Рис. 166 г); $AC = 10$.
 - Рис. 166 д).

Ответы: а) 6; б) $6\sqrt{6}$; в) $16\sqrt{6}$; г) 20; д) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

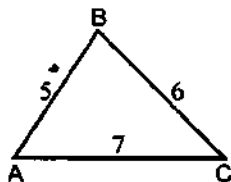
Особое внимание уделить задаче № 2д!

Наводящие вопросы:

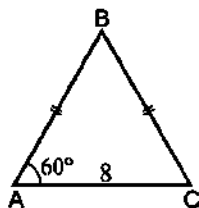
- Какая формула используется для вычисления площади треугольника?



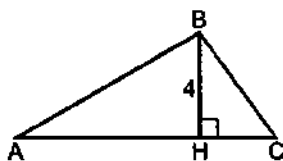
а)



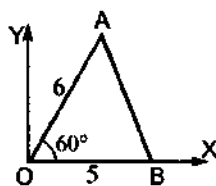
б)



в)



г)



д)

Рис 166

- Как, используя данные задачи, можно найти высоту, проведенную к стороне OB ?
- Если AH – высота треугольника OAB , то, что можно сказать о треугольнике OAH ?
- Каким соотношением связаны в треугольнике OAH гипотенуза OA , угол AOH и противолежащий ему катет AH ?
- Чему равна высота AH ?
- Вычислите площадь треугольника OAB .

V. Изучение нового материала

Вывод формулы о площади треугольника можно получить в процессе решения задачи в творческих группах с последующим обсуждением всех вариантов решений.

Задача

В $\triangle ABC$ $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \alpha$.

Найдите площадь треугольника (рис. 167).

Решение:

Координаты точки B равны:

$$x = a \cdot \cos \alpha, y = a \cdot \sin \alpha.$$

Высота $\triangle ABC$, проведенная к стороне AC , равна BH . С другой стороны, BH – это ордината точки B , т. е. $BH = a \cdot \sin \alpha$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} b \cdot (a \cdot \sin \alpha) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

Итак,

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

где a , b – стороны треугольника, α – угол между ними.

Для более глубокого усвоения вывода формулы о площади треугольника желательно задать следующие вопросы контролирующего характера (опрос начинать с менее подготовленных учащихся):

- Для чего проведена высота $\triangle ABC$?
- Почему координаты точки B равны $(a \cdot \cos \alpha; a \cdot \sin \alpha)$?
- Почему $BH = a \cdot \sin \alpha$?
- В формуле $S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$, где по отношению к сторонам a и b треугольника расположен угол α ?

VI. Закрепление изученного материала

1. Решить самостоятельно задачи № 38, 39 из рабочей тетради, решения обсудить.

Вопросы для обсуждения задачи № 38:

- Лежит ли угол B между сторонами AB и BC треугольника ABC ?

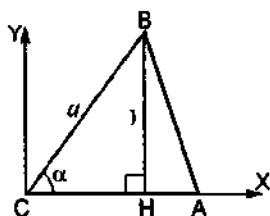


Рис. 167

- Какую формулу вы использовали для вычисления площади треугольника ABC ?
- Можно ли площадь треугольника ABC вычислить другим способом?
- Какой из этих способов наиболее рациональный?

Вопросы для обсуждения задачи № 39:

- Какая зависимость существует между площадью треугольника, двумя его сторонами и углом, заключенным между этими сторонами?
- Объясните, почему в данной задаче $S_{\Delta} = BE^2 \sin \angle E$?

2. Решить самостоятельно задачи:

I уровень – № 1020 (а), 1022, дополнительные задачи № 1, 2.

II уровень – № 1022, 1024, дополнительные задачи № 1, 2.

Задача № 1020 (а)

Решение:

$AB = 6\sqrt{8}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60^\circ$, тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{8} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $12\sqrt{6}$ см².

Задача № 1022

Решение:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A.$$

$$S_{ABC} = 60 \text{ см}^2, AC = 15 \text{ см}, \angle A = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot \sin \angle A} = 16 \text{ (см)}.$$

Ответ: 16 см.

Задача № 1024

Решение:

$$\text{а) Рис. 168 а). Из } \triangle ABM \sin \alpha = BM : AB \Rightarrow AB = \frac{h_b}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Из } \triangle AKC \sin \alpha = KC : AC \Rightarrow AC = \frac{h_c}{\sin \alpha}.$$

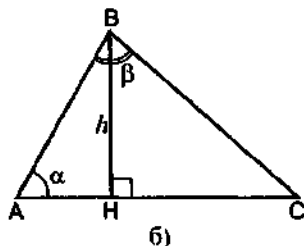
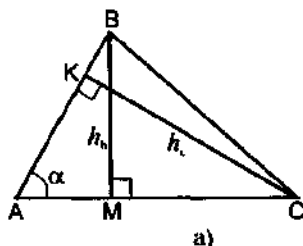


Рис 168

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b}{\sin \alpha} \cdot \frac{h_c}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{h_b \cdot h_c}{2 \sin \alpha}.$$

б) Рис. 168 б):

$$\text{Из прямоугольного } \triangle ABH \sin \alpha = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

В прямоугольном $\triangle CBH$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle C = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta).$$

$$\sin \angle C = BH : BC \Rightarrow BC = h : \sin(\alpha + \beta).$$

$$S_{AHC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \beta = \frac{h^2}{2 \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}.$$

Ответ: а) $\frac{h_b \cdot h_c}{2 \sin \alpha}$; б) $\frac{h^2}{2 \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}$.

Дополнительные задачи

Задача 1

Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом при основании 15° и боковой стороной, равной 5 см.

Решение (рис. 169):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B. \quad \angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 150^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{4} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $\frac{25}{4} \text{ см}^2$.

Задача 2

В $\triangle ABC$ $AB = 4$, $BC = 6$, BD – биссектриса, $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите площади треугольников ABD и CBD .

Решение (рис. 170):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

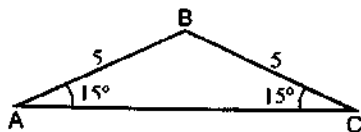


Рис. 169

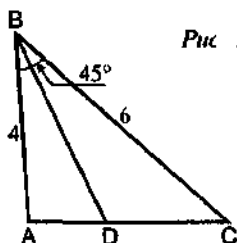


Рис. 170

$$BD - \text{биссектриса } \triangle ABC, \text{ тогда } \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin \frac{45^\circ}{2}}{BC \cdot BD \cdot \sin \frac{45^\circ}{2}} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Так как } S_{ABK} = 6\sqrt{2} = S_{ABD} + S_{CBD}, \quad \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{2}{3},$$

$$\text{то } \Rightarrow S_{ABD} = \frac{12\sqrt{2}}{5}; \quad S_{CBD} = \frac{18\sqrt{2}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } S_{ABD} = \frac{12\sqrt{2}}{5}; \quad S_{CBD} = \frac{18\sqrt{2}}{5}.$$

Задача 3

В треугольнике MNK $MK = 12$, $NK = 16$, $\angle K = \alpha$, MM_1 и NN_1 — медианы, пересекающиеся в точке O . Найти площадь четырехугольника N_1OM_1K .

Решение (рис. 171):

Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих (равных по площади) треугольников.

Так как медианы NN_1 и MM_1 пересекаются в точке O , то KO также является медианой, тогда $S_{N_1OM_1K} = 2 \cdot S_{N_1OK} = 2 \cdot \frac{1}{6} S_{MNK}$.

$$S_{MNK} = \frac{1}{2} KM \cdot KN \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 \cdot \sin \alpha = 96 \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{N_1OM_1K} = \frac{1}{3} \cdot 96 \sin \alpha = 32 \sin \alpha.$$

Ответ: $32 \sin \alpha$.

Задача 4

В треугольнике ABC медианы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O . AA_1 и $CC_1 = 18$ см, $\angle AOC_1 = 60^\circ$. Найдите площадь $\triangle ABC$.

Решение (рис. 172):

Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Так как $AA_1 = 15$ см, $CC_1 = 18$ см,

то $AO = \frac{2}{3} AA_1 = 10$ см, $C_1O = \frac{1}{3} CC_1 = 6$ см.

$$S_{AOC_1} = \frac{1}{2} OC_1 \cdot OA \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

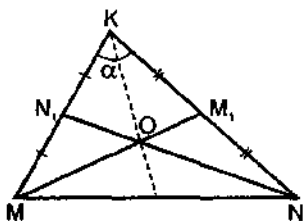


Рис 171

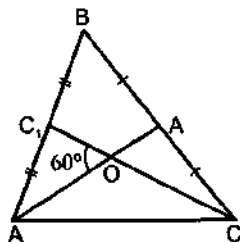


Рис 172

$$S_{ABC} = 6 \cdot S_{AOC_1} = 90\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $90\sqrt{3}$ (см²).

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 96, вопрос 7.

Решить задачи:

I уровень – № 40 из рабочей тетради, № 1020 (б, в), 1021, 1023.

II уровень – № 1021, 1023, дополнительные задачи № 3, 4.

Урок 29

Теоремы синусов и косинусов

Цели урока:

- Доказать теоремы синусов и косинусов и показать их применение при решении задач.
- Закрепить теорему о площади треугольника и совершенствовать навыки решения задач на ее применение.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Подготовить у доски доказательство теоремы о площади треугольника, а затем заслушать ответ всем классом.

Проверка домашнего задания

Индивидуально провести домашние задачи № 40 (из рабочей тетради), № 1023; дополнительные задачи № 3, № 4.

Задача № 40

Решение:

Углы параллелограмма равны 60° и 120° .

$$S = 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: $12\sqrt{3}$ м².

Задача № 1023

Решение (рис. 173):

Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, т. е. $OC = OD = OB = OA$.

$$S_{OCD} = S_{AOB} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD.$$

$\angle BOC = 180^\circ - \angle COD$, тогда

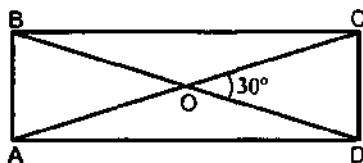


Рис. 173

$$\sin \angle BOC = \sin(180^\circ - \angle COD) = \sin \angle COD.$$

$$S_{BOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin \angle COD, \text{ следовательно,}$$

$$S_{OCD} = S_{AOB} = S_{BOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD.$$

Обозначим диагональ прямоугольника через d , получим:

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin \alpha \text{ (где } \alpha \text{ – угол между диагоналями),}$$

$$\text{т. е. } S_{OCD} = \frac{1}{8} d^2 \sin \alpha \Rightarrow S_{\text{пря-ка}} = 4 \cdot \frac{1}{8} d^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha.$$

$$\text{Итак, } S_{\text{пря-ка}} = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha.$$

$$\text{Если } d = 10 \text{ см, } \alpha = 30^\circ \Rightarrow S_{\text{пря-ка}} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 25 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 25 см².

Работа по индивидуальным карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. В треугольнике MNK $\angle MNK = 150^\circ$, $MN = 8$, а площадь треугольника равна 20. Найдите NK .
2. В параллелограмме один из углов равен 45° , а его стороны равны 5 см и 8 см. Найдите его площадь.
3. В прямоугольнике диагональ равна 12 см, а угол между диагоналями 30° . Найдите площадь прямоугольника.

II уровень (карточка № 2)

1. Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 8 см и 12 см, а угол между ними равен 45° .
2. В треугольнике MNK $\angle N = 150^\circ$, $MN = 4$ см, $NK = 6$ см, NE – биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольников MNE и NKE .
3. Медианы $\triangle ABC$ пересекаются в точке O , $\angle ABC = 30^\circ$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см. Найдите произведение площадей треугольников AOC , BOC , BOA .

III уровень (карточка № 3)

1. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность так, что основание AD – диаметр окружности. Диагональ трапеции равна 16 см, а ее площадь – 64 см². Найдите углы трапеции.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD равно 8 см, диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB , а угол при основании AD равен 60° . Найдите площадь трапеции.
3. В треугольнике MNK медианы MM_1 и KK_1 пересекаются в точке O , $MM_1 = 4,5$, $KK_1 = 6$. Найдите угол MOK , если известно, что площадь треугольника MNK равна 9.

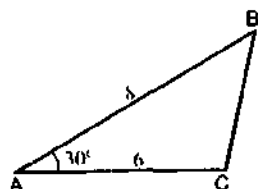


Рис. 174

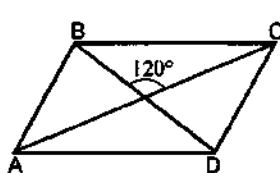


Рис. 175

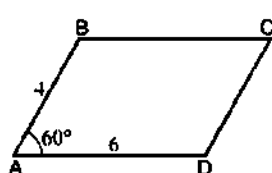


Рис. 176

III. Решение задач на готовых чертежах

Решить самостоятельно задачи на готовых чертежах с последующей самопроверкой и обсуждением решения тех из них, с которыми не справились большинство учащихся.

При обсуждении задач обратить внимание на следующие формулы:

$$S_{\text{парал-ма}} = ab \sin \alpha,$$

где a, b – стороны параллелограмма, α – угол между ними.

$$S_{\text{прям-ка}} = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha,$$

где d – диагональ прямоугольника, α – угол между диагоналями.

$$S_{\text{парал-ма}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha,$$

где d_1 и d_2 – диагонали параллелограмма, α – угол между ними.

1. Рис. 174. *Найти:* S .
2. Рис. 175. $ABCD$ – параллелограмм. $BD = 6$, $AC = 10$.
Найти: S .
3. Рис. 176. $ABCD$ – параллелограмм.
Найти: S .
4. Рис. 177. $ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$.
Найти: S .
5. Рис. 178. $ABCD$ – прямоугольник. $BD = 10$, $BC = 5\sqrt{3}$.
Найти: CD .
6. Рис. 179. $ABCD$ – параллелограмм.
Найти: высоты параллелограмма.
7. Рис. 180. $BC = 2\sqrt{7}$.
Найти: AH .
8. Рис. 181. $\angle ABC = 45^\circ$.
Найти: S_{ABD} , S_{BDC} .

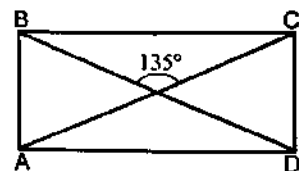


Рис. 177

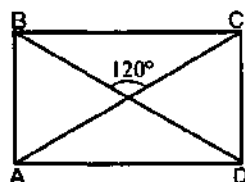


Рис. 178

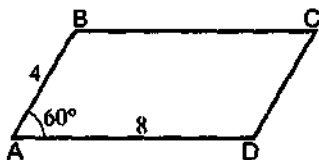


Рис 179

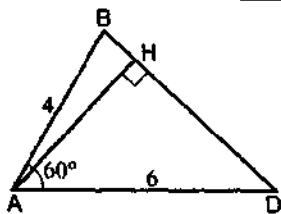


Рис 180

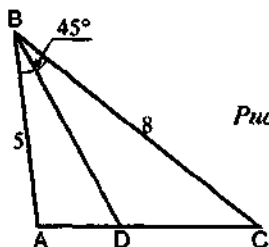


Рис 181

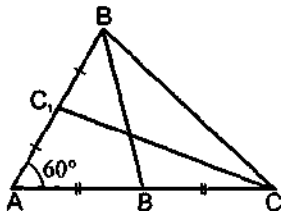


Рис 182

9. Рис. 182. $AB = 10$, $AC = 14$.

Найти: S_{BOC} .

Ответы к задачам на готовых чертежах:

1. $S = 24$;

2. $S = 15\sqrt{3}$;

3. $S = 12\sqrt{3}$;

4. $S = 36\sqrt{2}$;

5. $CD = 5$;

6. $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$;

7. $AH = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$;

8. $S_{ABD} = \frac{50\sqrt{2}}{13}$; $S_{BDC} = \frac{80\sqrt{2}}{13}$;

9. $S_{BOC} = \frac{35\sqrt{3}}{3}$.

III. Изучение нового материала

1. Сформулировать и доказать теорему синусов (п. 97 учебника).

Теорема: Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

Дано: $\triangle ABC$

Доказать: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$.

Доказательство проводится в виде беседы учителя с учащимися:

Вопрос: Какая формула выражает зависимость между сторонами треугольника и синусами его углов?

Ответ: Формула для вычисления площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B \quad (1)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C \quad (2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \quad (3)$$

Вопрос: Приравняем равенства 1 и 2. Чему равно отношение $\frac{AB}{\sin C}$?

Ответ: $\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C$

$$AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C \quad \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \quad (4)$$

– Как можно получить равенство $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$?

Ответ: Приравняем равенства (2) и (3):

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$BC \cdot \sin C = AB \cdot \sin A \quad \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \quad (5).$$

– Верно ли равенство $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$? Почему? (Верно, это следует из равенств (4) и (5).)

2. Сформулировать и доказать теорему косинусов (п. 98 учебника).

– Очень часто в треугольнике известны две стороны и угол между ними и необходимо найти третью его сторону. Справиться с этой задачей нам позволяет *теорема косинусов*.

Теорема: Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$.

Доказательство проводится в виде ответов на вопросы учеников:

Вопрос: Поместим $\triangle ABC$ в прямоугольную систему координат так, чтобы точка A совпадала с началом координат, точка B лежала на положительной полуоси Ox , а точка C располагалась в I координатной четверти (рис. 183). Чему равны координаты вершин B и C треугольника?

Ответ: Т. к. $AB = c$ и точка B лежит на положительной полуоси Ox , то $B(c; 0)$. Если из точки C опустить перпендикуляр CH , то $\sin \alpha = \frac{CH}{AC}$, $\cos \alpha = \frac{AH}{AC}$, т. е.

$$CH = AC \sin \alpha = b \sin \alpha,$$

$$AH = AC \cos \alpha = b \cos \alpha.$$

Но CH – это ордината точки C , AH – абсцисса точки C , поэтому $C(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$.

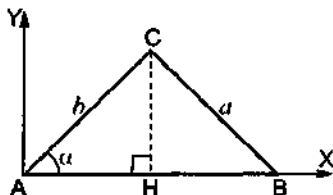


Рис. 183

Вопрос: Чему равно расстояние между точками B и C , если $B(c; 0)$, $C(b\cos\alpha; b\sin\alpha)$?

Ответ: $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + (b\sin\alpha - 0)^2 =$
 $= b^2\cos^2\alpha - 2bccos\alpha + c^2 + b^2\sin^2\alpha =$
 $= b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + c^2 - 2bccos\alpha = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha,$
 т. е. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Выполнить устно задания:

– Запишите теорему синусов для треугольника MNK :

Ответ: $\frac{MN}{\sin K} = \frac{NK}{\sin M} = \frac{MK}{\sin N}$.

– Запишите теорему косинусов для вычисления стороны:

а) AB в треугольнике ABC ;

б) CE в треугольнике CDE .

Ответ: а) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C$

б) $CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE \cdot \cos D$

2. Разобрать задачи № 41, 44 из рабочей тетради.

Наводящие вопросы к задаче № 41:

– Какая сторона лежит против угла A ? Какой угол лежит против стороны AC ?

– Используя свойства пропорций, выразите BC и найдите его значение. ($BC = 2$ см.)

Наводящие вопросы к задаче № 44:

– Как запишется теорема косинусов для вычисления стороны AB треугольника AOB ?

– Чему равен угол BOC ? Почему?

– Как вычислить косинус 120° ?

– Чему равен периметр параллелограмма? ($P = 6 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{7})$ см.)

3. Самостоятельно решить задачи № 1025 (а, в, г, е, и)

Задача № 1025

Решение (рис. 184):

а) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $c = 14$. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 80^\circ$

По теореме синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} = \frac{14}{\sin 80^\circ} \Rightarrow$$

$$a = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12,3; \quad b = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx$$

$$\approx 9,1.$$

в) $\angle A = 80^\circ$, $a = 16$, $b = 10$.

По т. синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

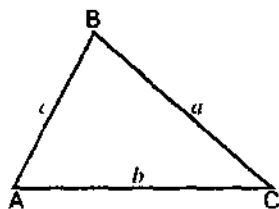


Рис. 184

$$\frac{16}{\sin 80^\circ} = \frac{10}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\sin B = \frac{10 \cdot \sin 80^\circ}{16} \approx 0,6155 \Rightarrow \angle B \approx 37^\circ 59'.$$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) \approx 62^\circ 01'$$

г) $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $a = 24,6$. $\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 65^\circ$.

По теореме синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{24,6}{\sin 65^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 70^\circ}$$

$$c = \frac{24,6 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 25,5; \quad b = \frac{24,6 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 19,2.$$

е) $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\angle C = 54^\circ$.

По теореме косинусов:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos A = 6,3^2 + 6,3^2 - 2 \cdot 6,3 \cdot 6,3 \cdot \cos 54^\circ = 2 \cdot 6,3^2 (1 - \cos 54^\circ) \Rightarrow c \approx 5,7.$$

По теореме синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{6,3}{\sin A} = \frac{c}{\sin 70^\circ} = \frac{5,7}{\sin 54^\circ} \Rightarrow \sin A = \sin B = \frac{6,3 \cdot \sin 54^\circ}{5,7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle B \approx 63^\circ.$$

и) $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$.

По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{7,3^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 7,3 \cdot 4,8} \approx 0,5755 \Rightarrow \angle A = 54^\circ 52'.$$

По теореме синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow$

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{7,3 \cdot 0,8174}{6} \approx 0,9950 \Rightarrow \angle B = 84^\circ 16'$$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 40^\circ 52'.$$

Ответы: а) $\angle C = 80^\circ$; $a \approx 12,3$; $b \approx 9,1$.

в) $\angle B \approx 37^\circ 59'$; $\angle C \approx 62^\circ 01'$; $c \approx 14$.

г) $\angle A = 65^\circ$; $b \approx 19,2$; $c \approx 25,5$.

е) $c \approx 5,7$; $\angle A = \angle B = 63^\circ$.

и) $\angle A \approx 54^\circ 52'$; $\angle B \approx 84^\circ 16'$; $\angle C \approx 40^\circ 52'$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пп 97, 98; вопросы 8, 9.

Решить задачу № 42 из рабочей тетради, № 1025 (б, д, ж, и).

Урок 30

Решение треугольников

Цель урока:

- Научить учащихся решать задачи на использование теоремы синусов и теоремы косинусов.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос по вопросам № 8, 9.
2. Проверить домашнюю задачу № 42 (из рабочей тетради).

Собрать рабочие тетради у менее подготовленных учащихся, проверить в конце урока.

3. Устное решение задач на готовых чертежах.

Рекомендация: при решении задач особое внимание уделять правильному выбору теоремы (т. е. выбору той теоремы, которая позволяет решить задачу наиболее рационально).

1. Рис. 185. Найти: AB .
2. Рис. 186. Найти: BC .
3. Рис. 187. Найти: AB .
4. Рис. 188. Найти: $\angle B$.
5. Рис. 189. Найти: $\angle A$.
6. Рис. 190. Найти: $\angle B$.

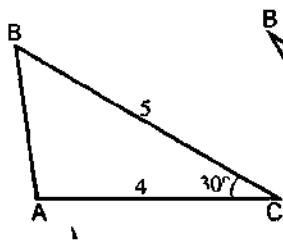


Рис. 185

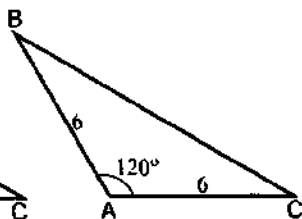


Рис. 186

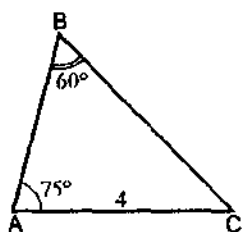


Рис. 187

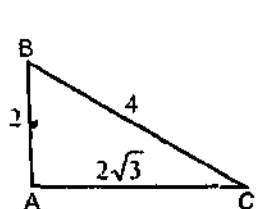


Рис. 188

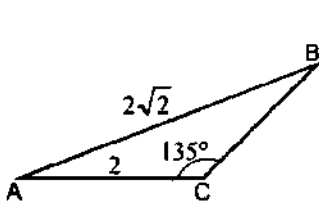


Рис. 189

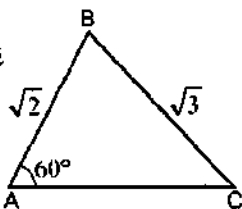


Рис. 190

Ответы к задачам на готовых чертежах

1. $AB = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$; 2. $BC = 6\sqrt{3}$;
3. $AB = \frac{4\sqrt{6}}{3}$; 4. $\angle B = 60^\circ$;
5. $\angle A = 15^\circ$; 6. $\angle B = 75^\circ$.

Индивидуальная работа по карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 15^\circ$, $BC = 4\sqrt{6}$.
Найти: AB , AC , $\angle B$.
2. Дано: $\triangle MNK$, $MN = 6$ см, $MK = 10$ см, $\angle M = 120^\circ$.
Найти: NK , $\angle N$, $\angle K$.
3. Дано: $\triangle OPT$, $OP = 24$, $PT = 30$, $OT = 36$.
Найти: $\angle O$, $\angle P$, $\angle T$.

II уровень (карточка № 2)

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = 10$. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle DAC = 45^\circ$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC один из углов при основании AC равен 30° , наименьшая медиана равна $\sqrt{7}$. Найдите другие медианы треугольника.
3. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите углы треугольника.

III уровень (карточка № 3)

1. В треугольнике MNK $MN = 4$, $NK = 5$, а его площадь равна $5\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины N до стороны MK , если известно, что $\cos \angle MNK < 0$.
2. В треугольнике CDE $\angle C = 64^\circ$, $\angle D = 50^\circ$, $DE + CE = 21$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
3. В треугольнике ABC $BC = 3,4$; $\angle ABC = 130^\circ$, а его площадь равна 3,6. Найдите AC .

III. Изучение нового материала

1. Прочитать самостоятельно п. 99 учебника.
 2. Фронтальная работа с классом – обсуждение материала п. 99.
- Вопросы для обсуждения:
- Что значит «решить треугольник»?
 - Перечислите три основные задачи на решение треугольников.
 - Составьте план решения треугольников:
 - а) по двум сторонам и углу между ними;
 - б) по стороне и прилежащим к ней углам;
 - в) по трем сторонам.
 - Дан треугольник ABC (подготовить рис. 191 на доске). Запишите формулу для вычисления:

- а) BC , если $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$,
 б) AC , если $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$,
 в) $\angle C$, если $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,
 г) $\angle B$, если $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$,
 д) AB , если $\angle C = \gamma$, $\angle B = \beta$, $AC = b$.

Ответы:

а) $BC = \sqrt{c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha}$

б) $AC = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin(\gamma + \beta)}$

в) $\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

г) $\angle B = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$

д) $AB = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$

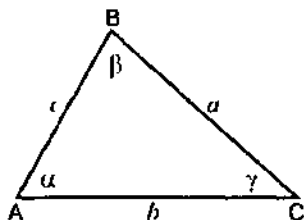


Рис. 191

IV. Решение задач

1. Разобрать решение задачи № 46 из рабочей тетради.

Задача № 46

Дать учащимся 2–3 минуты на самостоятельное решение, а затем заслушать варианты решений.

Наводящие вопросы:

- Какой угол лежит между сторонами a и b ?
- Почему в пункте 2 решения $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$? Как получилось данное равенство?
- Какая теорема используется для нахождения угла B ?

Ответ: $c = \sqrt{7} \approx 2,65$; $\angle A \approx 139^\circ$; $\angle B \approx 11^\circ$.

2. Решить самостоятельно задачи № 1026, № 1029, № 1031 (в).

Задача № 1026

Решение (рис. 192):

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 45^\circ.$$

По теореме синусов: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{12 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{6} \text{ (см)}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{6} \cdot 12 \sin 75^\circ \approx \approx 87 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $AB = 6\sqrt{6}$ см; $S \approx 87 \text{ см}^2$.

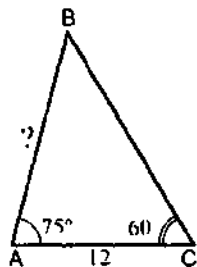


Рис. 192

Задача № 1029

Решение (рис. 193):

1) Из $\triangle BB_1C$ по теореме синусов:

$$\frac{BB_1}{\sin \angle BCB_1} = \frac{BC}{\sin \angle BB_1C}.$$

$$\angle BB_1C = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} + \beta \Rightarrow$$

$$\sin \angle BB_1C = \sin 180^\circ - \frac{\alpha}{2} + \beta =$$

$$= \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \Rightarrow BB_1 = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)}.$$

2) Из $\triangle CC_1B$ по теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin \angle C_1BC} = \frac{BC}{\sin \angle BC_1C}.$

$$\angle BC_1C = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \Rightarrow \sin \angle BC_1C = \sin \left(180^\circ - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \right) =$$

$$= \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \Rightarrow CC_1 = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)}.$$

3) Из $\triangle BAA_1$ по теореме синусов $\frac{AA_1}{\sin \angle ABA_1} = \frac{AB}{\sin \angle BA_1A}. \quad (1)$

$$\angle BA_1A = 180^\circ - (\angle ABA_1 + \angle BAA_1) = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{2} \right) =$$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

$$\sin \left(90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \right) = \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (2)$$

Из $\triangle ABC$ по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} \Rightarrow$

$$AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (3)$$

Подставляя равенства (2) и (3) в равенство (1), получаем:

$$AA_1 = \frac{AB \sin \angle ABA_1}{\sin \angle BA_1A} = \frac{\frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)}; \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)}; \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

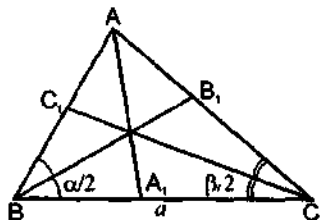


Рис. 193

Задача № 1031*Решение:*

Пусть в треугольнике ABC $AB = 9$, $BC = 5$, $AC = 6$. Т. к. наибольшей стороной является AB , то наибольшим углом будет угол, лежащий напротив стороны AB , т. е. угол C .

По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$.

$$\text{Тогда } \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{6^2 + 5^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = -\frac{1}{3}.$$

Т. к. $\cos C < 0 \Rightarrow \angle C$ – тупой, $\triangle ABC$ – тупоугольный.

Ответ: тупоугольный.

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

П. 99; вопросы 10, 11. Решить задачи:

I уровень: № 45 из рабочей тетради; № 1027, 1028, 1031 (а, б).

II уровень: № 1027, 1028, 1031 (а, б), 1032.

Урок 31

Решение треугольников

Цели урока:

- Доказать, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Показать применение данной теоремы при решении задач.
- Совершенствование навыков решения задач на решение треугольников.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся****Теоретический опрос**

- Что значит «решить треугольник»?
- Сформулируйте основные задачи на решение треугольников.
- Используя рисунки, составьте план решения задач.
 - Рис. 194. Найти: BC , $\angle B$, $\angle C$.
 - Рис. 195. Найти: $\angle B$, AB , BC .
 - Рис. 196. Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

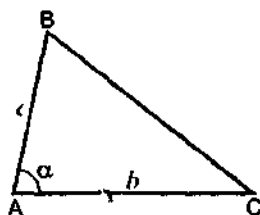


Рис. 194

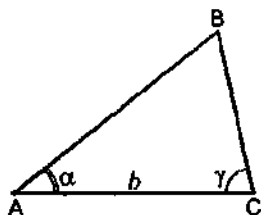


Рис. 195

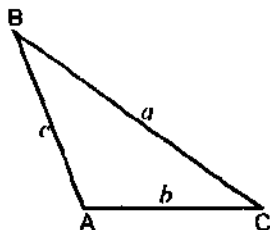


Рис. 196

Индивидуальная работа по карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. Рис. 197.

Запишите формулу для вычисления:

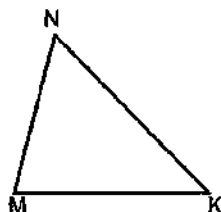
а) MN , если $MK = a$, $NK = b$, $\angle K = \alpha$;б) NK , если $MK = a$, $\angle M = \alpha$, $\angle K = \beta$;в) $\angle M$, если $MN = a$, $NK = b$, $MK = c$.2. Вычислите площадь треугольника MNK , если $MK = 6$, $\angle N = 60^\circ$, $\angle K = 45^\circ$.

Рис. 197

II уровень (карточка № 2)

1. Решите треугольник ABC , если $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle C = 45^\circ$.

2. Выясните, является ли треугольник тупоугольным, если его стороны равны 6, 7 и 10.

3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $AD = 8$, диагональ BD равна 9. Найдите диагональ AC .

III уровень (карточка № 3)

1. Найдите медианы треугольника со сторонами a , b , c .2. В треугольнике ABC $AB = BC$, BD – высота. Через середину высоты проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно.Найдите EF , если $BD = h$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BEF = \alpha$.

Решение задач на готовых чертежах

Учащиеся решают задачи самостоятельно с последующим обсуждением.

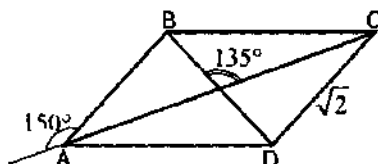
1. Рис. 198. $ABCD$ – параллелограмм.Найти: BD .2. Рис. 199. $ABCD$ – параллелограмм.Найти: BD .3. Рис. 200. $ABCD$ – ромб.Найти: AC .4. Рис. 201. $ABCD$ – параллелограмм.Найти: AC .5. Рис. 202. Найти: $\angle C$.6. Рис. 203. $ABCD$ – параллелограмм.Найти: BC .

Рис. 198

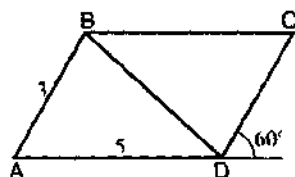


Рис. 199

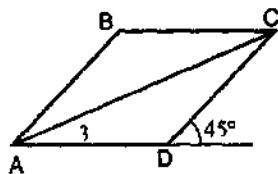


Рис 200

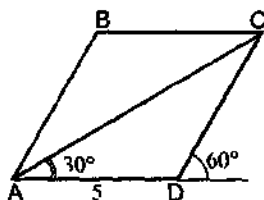


Рис 201

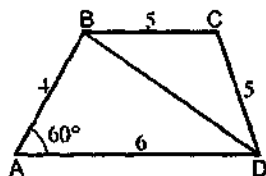


Рис 202

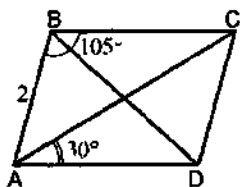


Рис 203

Ответы к задачам на готовых чертежах

1. $BD = 2$;
2. $BD = \sqrt{19}$;
3. $AC = 3\sqrt{2 + \sqrt{2}}$;
4. $AC = 5\sqrt{3}$;
5. $\angle C \approx 26^\circ 6'$;
6. $BC = 2\sqrt{2}$.

III. Решение задач

Прочитать самостоятельно задачу № 1033 учебника.

Запись на доске и в тетрадах:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

Разобрать у доски решения задач № 1, № 2.

1. В треугольнике ABC $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $AB = 12$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: $R = 4\sqrt{3}$.

2. В треугольнике MNK $MN = 6$, радиус описанной около него окружности равен 6 см, а $\angle N = 45^\circ$. Найдите площадь треугольника MNK .

Ответ: $S \approx 24,6$.

Решить самостоятельно задачи:

I уровень – № 3, № 4, № 5

II уровень – № 5, № 6, № 1030 (из учебника).

3. Треугольник CDE вписан в окружность с радиусом $2\sqrt{3}$, $\angle C = 75^\circ$, $\angle E = 45^\circ$. Найдите CE .

Ответ: $CE = 6$.

4. В треугольнике PST $PS = 20$, $ST = 48$, радиус описанной около него окружности равен 25. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $S = 475,8$.

5. Стороны треугольника равны 12, 13 и 14. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

Ответ: $R \approx 7,55$.

6. В треугольнике ABC $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 3$. Площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности, если центр лежит внутри треугольника.

Ответ: $R = \sqrt{21}$.

7. В треугольнике ABC $AB = 2,2$; $BC = 3,2$; $\angle ABC = 53^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника

Ответ: $R \approx 1,6$.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Подготовить доказательство задачи № 1033;

Решить задачи:

I уровень – № 47, № 48 (из рабочей тетради), № 1034;

II уровень – № 1034, № 1035, задачу № 7 (см. урок)

Урок 32

Измерительные работы

Цель урока:

- Ознакомить учащихся с методами измерительных работ и показать применение теорем синусов и косинусов при их выполнении.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

а) № 47, № 48 из рабочей тетради индивидуально (собрать тетради у 3–4 учащихся)

б) № 1034, № 1035 – дать задание двум ученикам подготовить на доске краткое решение задачи, ход решения заслушать.

Задача № 1034

Решение (рис. 204):

Пусть $AB = BC = CD = x$.

Из $\triangle ABC$ по т. косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$.

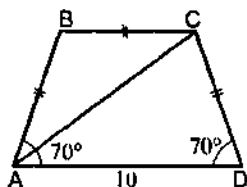


Рис. 204

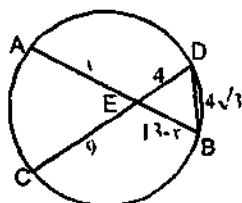


Рис. 205

$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 110^\circ$, тогда:

$$AC^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos 110^\circ = 2x^2 - 2x^2 \cdot (-0,3420) = 2,684x^2 \quad (1)$$

Из $\triangle ACD$ по теореме косинусов:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC.$$

$$\Rightarrow AC^2 = 100 + x^2 - 20x \cdot 0,342 = x^2 - 6,84x + 100 \quad (2).$$

Приравняем равенства (1) и (2), тогда

$$2,684x^2 = x^2 - 6,84x + 100$$

$$1,684x^2 + 6,84x - 100 = 0$$

$$D = 6,84^2 - 4 \cdot 1,684 \cdot (-100) = 720,3856; \quad \sqrt{D} = 26,84.$$

$$x_1 = \frac{-6,84 + 26,84}{2 \cdot 1,684} \approx 5,94$$

$$x_2 = \frac{-6,84 - 26,84}{2 \cdot 1,684} < 0 \text{ (не подходит по условию задачи)}$$

$$\text{Т. к. } x_1 \approx 5,94, \text{ то } P = 5,94 \cdot 3 + 10 = 27,82 \text{ (см)}$$

Ответ: $P \approx 27,82$ см.

Наводящие вопросы:

- Почему $\angle ABC = 110^\circ$?
- Почему можно предположить, что $AB = BC = CD = x$?
- Объясните справедливость равенства $2,684x^2 = x^2 - 6,84x + 100$
- Почему x_2 не подходит по условию задачи?

Задача № 1035

Решение (рис. 205):

Т. к. хорды AB и CD пересекаются в точке E , то $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

$AB = 13$ см, тогда, если $AE = x$ см, то $EB = 13 - x$ (см).

Тогда $x \cdot (13 - x) = 9 \cdot 4$. По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 13, \\ x_1 \cdot x_2 = 36, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 9.$$

Т. к. $x = 4$ см или $x = 9$ см, то $EB = 4$ см или $EB = 9$ см.

Из $\triangle DBE$ по теореме косинусов:

$$DB^2 = DE^2 + EB^2 - 2DE \cdot EB \cdot \cos \angle DEB.$$

$$\Rightarrow \cos \angle DEB = \frac{DE^2 + EB^2 - DB^2}{2DE \cdot EB}$$

Если $EB = 4$ см, то $\cos \angle DEB = \frac{4^2 + 4^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$, следовательно, $\angle DEB = 120^\circ$ и острый угол между хордами AB и CD равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Если $EB = 9$ см, то $\cos \angle DEB = \frac{4^2 + 9^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{49}{72} \approx 0,6806$.

Тогда $\angle DEB \approx 47^\circ 6'$.

Ответ 60° или $47^\circ 6'$.

Наводящие вопросы:

- Почему верно равенство $AE \cdot EB = CE \cdot ED$?
- Почему $\cos \angle DEB = \frac{DE^2 + EB^2 - DB^2}{2DE \cdot EB}$?
- На основании какой теоремы появилось это равенство?
- Докажите, что если $\cos \angle DEB = -\frac{1}{2}$, то $\angle DEB = 120^\circ$.

III. Решение задач на готовых чертежах

(Повторение измерительных работ на местности из курса геометрии 8 класса.)

Дать учащимся обдумать план решения, а затем заслушать и обсудить.

1. Рис. 206. $AC = 3,3$ м, $AC_1 = 13,2$ м, $BC = 1,5$ м.

Найти: высоту дерева.

2. Рис. 207. $AC = 112$ м, $A_1C_1 = 5,6$ см, $A_1B_1 = 8,4$ см.

Найти: расстояние от точки A до недоступной точки B .

Указание: решить задачи, используя подобие треугольников, а затем рассмотреть решения задач с применением тригонометрических функций (теорем синусов и косинусов).

IV. Изучение нового материала

Прочитать п. 100 самостоятельно.

Фронтальный опрос по изученному материалу:

- Как определить высоту предмета при условии, что основание предмета доступно?
- Как определить высоту предмета в случае, если основание предмета недоступно?
- Как измерить расстояние до недоступной точки?

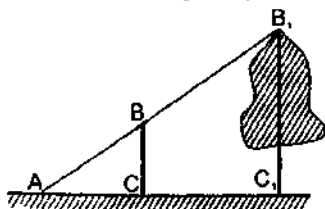


Рис. 206

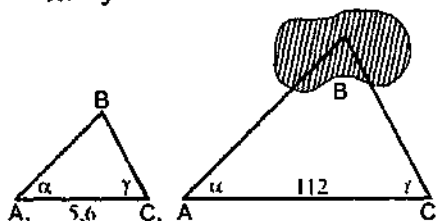


Рис. 207

- Найдите высоту дерева на рис. 295 учебника, если $a = 10$ м, $\alpha = 60^\circ$.
- Найдите высоту дерева на рис. 295 учебника, если $BC = 2$ м, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
- Найдите расстояние от пункта A до пункта C , если $AB = 30$ м, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ (см. рис. 296 учебника).

V. Решение задач

Разобрать задачи № 1036, № 1037 – вызвать к доске одного из учащихся для решения задачи № 1036.

Задача № 1036

Дано: $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle CAD = 2^\circ$, $EC = 50$ м.

Найти: BC .

Решение (рис. 208):

В $\triangle ABD$ $\angle D = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, следовательно, $AD = DB = 50$ м ($AD = EC = 50$ м, т. к. $ADCE$ прямоугольник.)

В $\triangle ADC$ $\angle D = 90^\circ$, $\angle A = 2^\circ$, $AD = 50$ м, $\operatorname{tg} A = \frac{DC}{AD}$, следовательно, $DC = AD \cdot \operatorname{tg} A = 50 \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \approx 50 \cdot 0,0349 = 1,745$ (м).

$$BC = BD + DC = 50 + 1,745 = 51,745 \text{ (м)}$$

Ответ: $\approx 51,745$ м

Наводящие вопросы:

- Как рис. 298 учебника можно преобразовать в геометрический чертеж?
- Что вы можете сказать о $\triangle ABD$?
- Как найти сторону DC треугольника ADC ?
- Чему равен отрезок BC , т. е. высота башни?

Задача № 1037

Вызвать к доске одного из учащихся и решать задачу с теми, кто не уверен, что справится с решением самостоятельно; остальным учащимся предложить решать задачу самостоятельно.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 70$ м, $\angle A = 12^\circ 30'$, $\angle B = 72^\circ 42'$, $CD \perp AB$.

Найти: CD .

Решение (рис. 209):

$$\text{В } \triangle ADC \text{ } \angle D = 90^\circ, CD = AD \cdot \operatorname{tg} 12^\circ 30'.$$

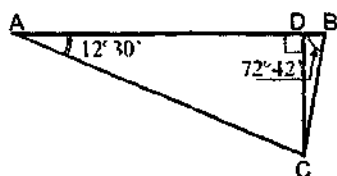
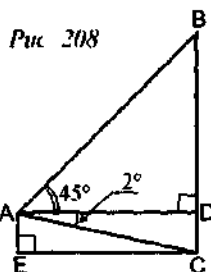


Рис. 209

В $\triangle BDC$ $\angle D = 90^\circ$, $CD = BD \cdot \operatorname{tg} 72^\circ 42'$.

Так как $AB = 70$ м, то $BD = 70 - AD$ (м),

тогда $CD = AD \cdot \operatorname{tg} 12^\circ 30' = (70 - AD) \cdot \operatorname{tg} 72^\circ 42'$;

$AD \cdot 0,2217 \approx (70 - AD) \cdot 3,21$;

$3,4327 \cdot AD = 224,77$;

$AD \approx 65,48$ (м); $CD \approx 65,48 \cdot 0,2217 \approx 14,52$ (м)

Ответ: $\approx 14,52$ м

Наводящие вопросы:

- Начертите рисунок к задаче. Чем для $\triangle ABC$ является расстояние от дерева C до другого берега?
- Расстояние от точки A до точки B равно 70 м. Чему равны отрезки AD и BD ?
- Чему равна сторона CD в треугольнике ADC ? А в треугольнике DBC ?
- Составьте уравнение и найдите приближенное значение CD .

VI. Самостоятельное решение задач

I уровень – № 1060 (г), № 1061 (б)

II уровень – № 1030.

Учащиеся работают самостоятельно, учитель по необходимости оказывает индивидуальную помощь.

Задача № 1060 (г)

Дано: $AC = 10,4$ см, $BC = 5,2$ см, $\angle B = 62^\circ 48'$.

Найти: $\angle A$, $\angle C$, AB .

Решение: По теореме синусов: $\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A}$, тогда

$$\frac{10,4}{\sin 62^\circ 48'} = \frac{5,2}{\sin \angle A}, \sin \angle A \approx \frac{5,2 \cdot 0,8894}{10,4} \approx 0,447 \Rightarrow \angle A \approx 26^\circ 24'$$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (26^\circ 24' + 62^\circ 48') = 90^\circ 48'.$$

$$\text{По теореме синусов: } \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle C} \Rightarrow \frac{10,4}{\sin 62^\circ 48'} = \frac{AB}{\sin 90^\circ 48'} \Rightarrow$$

$$AB \approx \frac{10,4 \cdot 0,9999}{0,8894} \approx 11,69 \text{ (см).}$$

Ответ: $\angle A \approx 26^\circ 24'$, $\angle C \approx 90^\circ 48'$; $AB \approx 11,69$ см.

Задача № 1061 (б)

Дано: $AB = 2\sqrt{2}$ дм, $BC = 3$ дм, $\angle B = 45^\circ$.

Найти: AC , $\angle A$, $\angle C$.

Решение: По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot$

$$\cos \angle B = 8 + 9 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5. \text{ Тогда } AC = \sqrt{5} \text{ дм.}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{5 + 9 - 8}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3} = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 0,4472 \Rightarrow$$

$$\angle C \approx 63^\circ 26'.$$

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) \approx 180^\circ - (45^\circ + 63^\circ 26') = 71^\circ 34'.$$

$$\text{Ответ: } AC = \sqrt{5} \text{ дм, } \angle A \approx 71^\circ 34'; \angle C \approx 63^\circ 26'.$$

Задача № 1030

Дано: $\Delta ABCD$ – параллелограмм. $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$.

Найти: BD , AC , $\angle AOB$.

Решение (рис. 210):

Из ΔABD по теореме косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle A = \\ = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \Rightarrow$$

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}.$$

В ΔABC $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$,

$$\cos \angle ABC = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

По теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \Rightarrow$$

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}.$$

В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит $AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$,

$$BO = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}.$$

В ΔAOB по т. косинусов: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB$.

$$\text{Тогда: } \cos \angle AOB = \frac{AO^2 + BO^2 - AB^2}{2AO \cdot BO} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha) + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) - a^2}{2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 - a^2}{\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha)(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)}} =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \alpha}}$$

$$\text{Ответ: } AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha};$$

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha};$$

$$\cos \angle AOB = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \alpha}}.$$

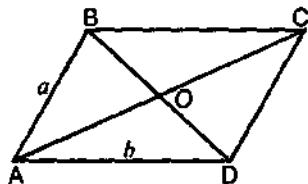


Рис 210

VII. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

П. 100, вопросы 11, 12;

Решить задачи:

I уровень – № 1060 (а, в), № 1061 (а, в), № 1038;

II уровень – № 1038, № 1064, № 1059.

Урок 33**Обобщенный урок по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника»****Цели урока:**

- Закрепление знаний, умений и навыков учащихся по изученной теме, устранение пробелов в знаниях.
- Совершенствование навыков решения задач на применение теоремы о площади треугольника, теорем синусов и косинусов.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Тест**

Тест на закрепление теоретических знаний с последующей самопроверкой и обсуждением тех заданий, по которым допущено наибольшее число ошибок.

I вариант

1. Для треугольника ABC справедливо равенство:
 - а) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle BCA$;
 - б) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle ABC$;
 - в) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$.
2. Площадь треугольника MNK равна:
 - а) $\frac{1}{2} MN \cdot MK \cdot \sin \angle MNK$;
 - б) $\frac{1}{2} MK \cdot NK \cdot \sin \angle MNK$;
 - в) $\frac{1}{2} MN \cdot NK \cdot \sin \angle MNK$.
3. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то эта сторона лежит против:
 - а) тупого угла;
 - б) прямого угла;
 - в) острого угла.
4. В треугольнике ABC известны длины сторон AB и BC . Чтобы найти сторону AC , необходимо знать величину:
 - а) угла A ;
 - б) угла B ;
 - в) угла C .

5. Треугольник со сторонами 5, 6 и 7 см:
а) остроугольный;
б) прямоугольный;
в) тупоугольный.
6. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $BC = 3$. Радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности равен:
а) 1,5;
б) $2\sqrt{3}$;
в) 3.
7. Если в треугольнике ABC $\angle A = 48^\circ$, $\angle B = 72^\circ$, то наибольшей стороной треугольника является сторона:
а) AB ;
б) AC ;
в) BC .
8. В треугольнике CDE :
а) $CD \cdot \sin C = DE \cdot \sin E$;
б) $CD \cdot \sin E = DE \cdot \sin C$;
в) $CD \cdot \sin D = DE \cdot \sin E$.
9. По теореме синусов:
а) Стороны треугольника обратно пропорциональны синусам противолежащих углов.
б) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.
в) Стороны треугольника пропорциональны синусам прилежащих углов.
10. В треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 5$ см. Найти отношение синуса угла A к синусу угла C :
а) $\frac{1}{2}$; б) 5; в) 2.

II вариант

1. Для треугольника ABC справедливо равенство:
а) $\frac{AB}{\sin A} = \frac{BC}{\sin B} = \frac{CA}{\sin C}$;
б) $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$;
в) $\frac{AB}{\sin B} = \frac{BC}{\sin C} = \frac{CA}{\sin A}$.
2. Площадь треугольника CDE равна:
а) $\frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin \angle CDE$;
б) $\frac{1}{2} CD \cdot DE$;
в) $CD \cdot DE \cdot \sin \angle CDE$.

3. Если квадрат стороны треугольника больше суммы квадратов двух других его сторон, то эта сторона лежит против:
 - а) острого угла;
 - б) прямого угла;
 - в) тупого угла.
4. В треугольнике MNK известны длина стороны MN и величина угла K . Чтобы найти сторону NK , необходимо знать:
 - а) величину $\angle M$;
 - б) длину стороны MK ;
 - в) значение периметра MNK .
5. Треугольник со сторонами 2, 3 и 4 см:
 - а) остроугольный;
 - б) прямоугольный;
 - в) тупоугольный.
6. В треугольнике MNK $MN = 2$, $\angle K = 60^\circ$. Радиус описанной около ΔMNK окружности равен:
 - а) 4;
 - б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;
 - в) 2.
7. Если в треугольнике MNK $\angle M = 76^\circ$, $\angle N = 64^\circ$, то наименьшей стороной треугольника является сторона:
 - а) MN ;
 - б) NK ;
 - в) MK
8. В треугольнике ABC :
 - а) $AB \cdot \sin C = AC \cdot \sin B$;
 - б) $AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C$;
 - в) $AB \cdot \sin A = AC \cdot \sin B$.
9. По теореме о площади треугольника:
 - а) Площадь треугольника равна произведению двух его сторон на синус угла между ними.
 - б) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на угол между ними.
 - в) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.
10. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 2$ см. Найти отношение синуса угла A к синусу угла B :
 - а) $\frac{1}{3}$;
 - б) $\frac{1}{4}$;
 - в) 3.

Ключи к тесту

Учитель называет правильные ответы, учащиеся сами проверяют свои ответы.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>I вариант</i>	а	в	б	б	а	в	б	а	а	а
<i>II вариант</i>	б	а	в	а	в	б	а	б	в	а

III. Решение задач

(Учащиеся работают самостоятельно, учитель оказывает индивидуальную или групповую помощь по необходимости.)

I уровень

1. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 6 см. Медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Найдите AA_1 , если угол B_1OA равен 60° .
2. Найти диагональ параллелограмма, если вторая диагональ равна 8 см, а стороны равны 4 и 6 см.
3. Найти сторону треугольника, если противолежащий ей угол равен 60° , а радиус описанной окружности равен 9 см.

II уровень

1. Сторона треугольника равна 26 см, а две другие образуют угол, равный 120° , и относятся как 7 : 8. Найдите эти стороны.
2. Основание треугольника равно 7 см, угол при вершине равен 60° , сумма боковых сторон равна 13 см. Найдите боковые стороны.
3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Ответы к задачам:

I уровень: 1. $3\sqrt{3}$ см; 2. $2\sqrt{10}$ см; 3. $9\sqrt{3}$ см.

II уровень: 1. 14 см; 16 см; 2. 5 см; 8 см.

IV. Самостоятельная работа**I уровень****I вариант**

1. Площадь параллелограмма равна $30\sqrt{3}$ см², а один из углов равен 60° . Найдите его периметр, если длина одной из сторон равна 6 см.
2. В треугольнике MNK $MN = NK$, $MK = \sqrt{2}$, $\angle M = 30^\circ$, ML – биссектриса. Найдите ML .
3. Стороны треугольника равны 8, 10 и 12 см. Найдите угол, лежащий против меньшей стороны.

II вариант

1. Площадь параллелограмма равна $40\sqrt{2}$ см², а один из углов равен 45° . Найдите его периметр, если длина одной из сторон равна 10 см.
2. В треугольнике CDE CM – биссектриса, $\angle DCE = 60^\circ$, $ME = 3\sqrt{2}$. Найдите CM , если $\angle CED = 45^\circ$.
3. Стороны треугольника равны 6, 9 и 10 см. Найдите угол, лежащий против большей стороны.

II уровень

I вариант

1. В треугольнике ABC медианы CD и BE пересекаются в точке K . Найдите площадь четырехугольника $ADKE$, если $BC = 20$, $AC = 12$, $\angle ACB = 135^\circ$.
2. В треугольнике CDE $CE = b$, $\angle C = \alpha$, $\angle D = \beta$. На стороне CE отмечена точка P так, что $\angle DPE = \gamma$. Найдите DP .
3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 8$, $AC = 2\sqrt{13}$. Найдите BD .

II вариант

1. В треугольнике MNK медианы MA и NB пересекаются в точке C и образуют угол в 45° . Найдите площадь треугольника MNK , если $MA = 12$, $NB = 9$.
2. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне BC отмечена точка E так, что $AE = m$, $\angle AEB = \gamma$. Найдите AC .
3. В параллелограмме $MNKP$ $MN = 4$, $MP = 6$, $NP = 2\sqrt{7}$. Найдите MK .

III уровень

I вариант

1. Центр описанной вокруг треугольника ABC окружности лежит вне треугольника, и угол A наибольший. Найдите угол A , если $AB = 3$ см, $AC = 4$ см и площадь треугольника равна 3 см^2 .
2. В треугольнике ABC $AB = BC$, BD – высота. Через середину высоты проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите EF , если $BD = h$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BEF = \alpha$.
3. Стороны треугольника равны 6, 7 и 8. Найдите медиану, проведенную к большей стороне

II вариант

1. Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC , находится вне этого треугольника, и угол C наибольший. Найдите величину угла C , если площадь треугольника равна $2\sqrt{3} \text{ см}^2$, $AC = 2$ см, $BC = 4$ см.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. Через середину высоты BD треугольника проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно, $KL = m$. Найдите высоту BD , если $\angle ABC = \beta$, $\angle BLK = \alpha$.
3. Стороны треугольника равны 4, 6 и 7. Найдите медиану, проведенную к меньшей стороне.

Ответы к задачам самостоятельной работы:

I уровень

I вариант: 1. 10 см; 2. 1 см; 3. $41^\circ 30'$.

II вариант: 1. 8 см; 2. 6 см; 3. $80^{\circ}57'$.

II уровень

I вариант: 1. $20\sqrt{2}$; 2. $\frac{b \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin \gamma}$; 3. $2\sqrt{37}$.

II вариант: 1. $36\sqrt{2}$; 2. $\frac{m \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$; 3. $4\sqrt{5}$.

III уровень

I вариант: 1. 150° ; 2. $\frac{h \sin \beta \sin(\alpha + \frac{\beta}{2})}{2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}$; 3. $\sqrt{\frac{53}{2}}$.

II вариант: 1. 120° ; 2. $\frac{2m \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin(\alpha + \frac{\beta}{2})}$; 3. $\sqrt{39}$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи: № 1057, № 1058, № 1062, № 1063.

Урок 34

Скалярное произведение векторов

Цели урока:

- Познакомить учащихся с понятием «угол между векторами».
- Ввести понятия скалярного произведения двух векторов, скалярного квадрата вектора.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Анализ ошибок самостоятельной работы

Идет разбор заданий, с которыми не справились большинство учащихся.

III. Актуализация знаний

Решение задач с целью подготовить учащихся к восприятию нового материала. Фронтальная работа с классом: отвечает один из учащихся, остальные при необходимости дополняют, исправляют ответ своего товарища.

Задача 1

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (рис. 211).

Найти:

- векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{OC}$;
- векторы, сонаправленные $\overrightarrow{AB}$;
- векторы, противоположно направленные $\overrightarrow{BC}$;

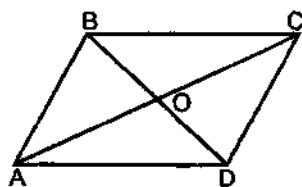


Рис. 211

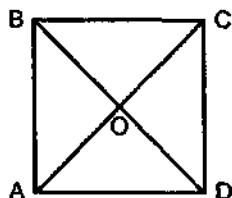


Рис. 212

- г) векторы, равные $\overrightarrow{BO}$;
 д) $\overrightarrow{BD}$, если $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{BC}| = 5$, $\angle BAD = 60^\circ$;
 е) $\cos \angle ABC$, если $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$.

Задача 2

Дано: $ABCD$ – квадрат (рис. 212).

Найти:

- а) $\overrightarrow{BO}$, если $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$;
 б) $\angle ABO$, $\angle AOB$;
 в) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|$;
 г) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$;
 д) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

IV. Изучение нового материала

1. Ввести понятие угла между векторами.

Рис. 213.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}.$$

Если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Если $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Если $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

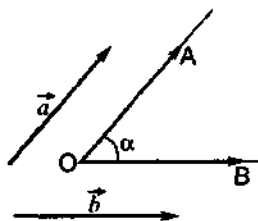


Рис. 213

2. Ввести понятие скалярного произведения векторов.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2 - \text{скалярный квадрат вектора } \vec{a}.$$

V. Закрепление изученного материала

1. Разобрать задачи № 49, № 52 из рабочей тетради.

Один из учащихся читает задачу и предлагает свой вариант решения. Остальные внимательно слушают и вносят исправления, если это необходимо.

2. Решить самостоятельно задачи:

I уровень – № 1039, № 1041.

II уровень – дополнительные задачи № 1, 2, 3.

Дополнительные задачи**Задача 1**

Дано: В трапеции $MNKP$ $MP \parallel NK$, $\angle M = 90^\circ$, $MP = 6$, $NK = 2$, $MN = 6$.

Найти: а) $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{KP}$; б) $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PK}$; в) $\overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{PM}$.

Задача 2

Дано: В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle D$, $AD = 15$, $BC = 5$, $AB = 13$, CE – высота трапеции.

Найти: а) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$; б) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Задача 3

В прямоугольной трапеции $MNKP$ $\angle M = 90^\circ$, MP и NK – основания трапеции. $MP = 5$, $NK = 3$.

Найти: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MN}$.

Задача 4

В ромбе $ABCD$ $AD = 10$ см, $AC = 16$ см. На сторонах AC и BD отмечены точки K и F соответственно.

Найти: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{FC}$.

VI. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

П. 101, 102, вопросы 13–16.

Решить задачи:

I уровень – № 50, № 53 (из рабочей тетради), № 1040, № 1042.

II уровень – № 1040, 1042, 1043, дополнительную задачу № 4.

Урок 35**Скалярное произведение в координатах****Цель урока:**

- Доказать теорему о скалярном произведении двух векторов в координатах и ее следствия.
- Ознакомить учащихся со свойствами скалярного произведения векторов.
- Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

№ 50, 53 из рабочей тетради – индивидуально (собрать тетради).

№ 1042, № 1043 – заслушать ход решения задач по заранее подготовленным на доске кратким решениям.

Учащимся дается задание: внимательно выслушать решение задачи и быть готовым ответить на вопрос: «Верно ли решена задача? Какие замечания к решению у тебя есть?»

Задача № 1042

Решение (рис. 214):

В равностороннем треугольнике все углы равны 60° .

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle BAC =$$

$$= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2};$$

$$б) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos 120^\circ =$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2};$$

$$в) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \text{ т. к. } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD};$$

$$г) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2 = a^2.$$

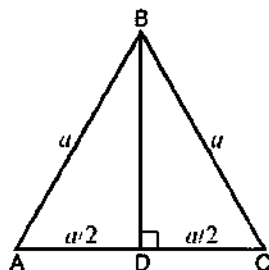


Рис. 214

Ответ: а) $\frac{a^2}{2}$; б) $-\frac{a^2}{2}$; в) 0; г) a^2 .

Вопросы, контролирующие уровень понимания решения задачи:

- Докажи, что угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 60° .
- Почему угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ равен не 60° , а 120° ?

Задача № 1043

Дано: $|\vec{P}| = 8$, $|\vec{Q}| = 15$, $\angle A = 120^\circ$.

Найти: $|\vec{R}|$.

Решение (рис. 215):

$$\text{В } \triangle PAA_1 \angle A_1 = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, PA_1 = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

По теореме Пифагора:

$$AA_1 = \sqrt{AP^2 - PA_1^2}.$$

Из $\triangle PAA_1F$ по теореме Пифагора:

$$AA_1 = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}, \text{ следовательно,}$$

$$\sqrt{AP^2 - PA_1^2} = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}.$$

$$8^2 - 4^2 = AR^2 - 11^2;$$

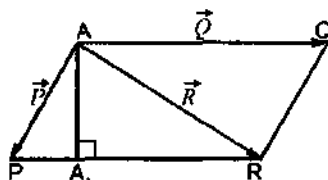


Рис. 215

$$AR^2 = 8^2 + 11^2 - 4^2 = 169 \Rightarrow AR = 13.$$

$$\text{Значит } |\vec{R}| = 13.$$

$$\text{Ответ: } |\vec{R}| = 13.$$

Вопросы, контролирующие уровень понимания решения задачи:

- Почему $PA_1 = \frac{1}{2} AP$?
- Объясни, как появилось равенство $\sqrt{AP^2 - PA_1^2} = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}$.
- Почему равнодействующая сила равна по модулю длине диагонали AR параллелограмма PAQR?

III. Тест с последующей взаимопроверкой

См. рис. 216.

I вариант

Часть I

- Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание.

1. $(\vec{AC}, \vec{CB}) = \dots$
2. $(\vec{AB}, \vec{CA}) = \dots$
3. $(\vec{AB}, \vec{CB}) = \dots$
4. $\vec{CB} \cdot \vec{CA} = \dots$
5. $\vec{AB} \cdot \vec{BA} = \dots$

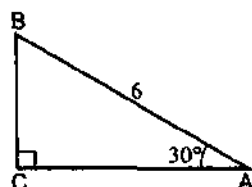


Рис. 216

Часть II

- Установите верный ответ из числа предложенных:

6. $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \dots$
 - а) 9;
 - б) $9\sqrt{3}$;
 - в) 18.
7. Скалярное произведение векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BA}$:
 - а) равно нулю;
 - б) отрицательно;
 - в) положительно.
8. Скалярное произведение координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ равно:
 - а) 1;
 - б) -1;
 - в) 0.
9. Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
 - а) сонаправлены;
 - б) перпендикулярны;
 - в) противоположно направлены.
10. Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} \cdot \vec{n} = -15$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 6$.
 - а) 50° ;
 - б) 60° ;
 - в) 120° .

II вариант

См. рис. 217.

Часть I

– Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание.

1. $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dots$
2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \dots$
3. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = \dots$
4. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \dots$
5. $\overrightarrow{AB}^2 = \dots$

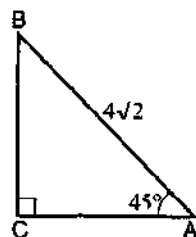


Рис. 217

Часть II

– Установите верный ответ из числа предложенных:

6. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \dots$
а) 32; б) $16\sqrt{2}$; в) 16.
7. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$:
а) положительно;
б) отрицательно;
в) равно нулю.
8. Скалярный квадрат координатного вектора $\vec{i}$ равен:
а) 1; б) 0; в) -1.
9. Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = -20$, $|\vec{x}| = 4$, $|\vec{y}| = 5$, то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$:
а) перпендикулярны;
б) противоположно направлены;
в) сонаправлены.
10. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$.
а) 30° ; б) 120° ; в) 60° .

Учащиеся обмениваются тетрадями и проверяют ответы друг у друга по ответам, заранее подготовленным на переносной доске в виде следующей таблицы:

Ключи к тесту

	I часть					II часть				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I вариант	90°	150°	60°	0	-36	а	б	в	а	в
II вариант	90°	135°	45°	0	32	в	а	а	б	в

IV. Изучение нового материала

1. Доказать, что если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ (см. п. 103)

2. Следствия:

$$1) \vec{a}\{x_1; y_1\} \perp \vec{b}\{x_2; y_2\} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0.$$

$$2) \text{ Если } \vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}, \alpha = (\vec{a}, \vec{b}), \text{ то } \cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

3. Свойства скалярного произведения векторов:

$$1) \text{ Если } \vec{a}^2 \geq 0, \text{ то } \vec{a}^2 > 0 \text{ при } \vec{a} \neq \vec{0}.$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (переместительный закон).}$$

$$3) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \text{ (распределительный закон).}$$

$$4) (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ (сочетательный закон).}$$

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачи № 55, № 57 из рабочей тетради.

Один из учащихся, решая задачу в рабочей тетради, комментирует решение вслух; остальные внимательно его слушают, делая при этом записи в тетради, и вносят исправления, если ученик допустил ошибку.

2. Разобрать всем классом задачу № 1047 (а).

Вопросы классу:

- Когда два вектора перпендикулярны?
- Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?
- Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в координатах?

3. Самостоятельно решить задачи № 1044 а, в), 1045, 1047 в), 1046.

Задача № 1047

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \text{ если } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ или } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0, \text{ где } \vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}.$$

$$\text{а) } \vec{a}\{4; 5\}, \vec{b}\{x; -6\}, \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow 4 \cdot x + 5 \cdot (-6) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x = 30 \Rightarrow x = 7,5.$$

$$\text{в) } \vec{a}\{0; -3\}, \vec{b}\{5; x\}, \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow 0 \cdot 5 + (-3) \cdot x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 0.$$

Ответ: а) 7,5; в) 0.

Задача № 1044

$$\text{а) } \vec{a}\{\frac{1}{4}; -1\}, \vec{b}\{2; 3\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = \frac{1}{2} - 3 = -2,5$$

$$\text{в) } \vec{a}\{1,5; 2\}, \vec{b}\{4; -0,5\} \Rightarrow 1,5 \cdot 4 + 2 \cdot (-0,5) = 6 - 1 = 5$$

Ответ: а) -2,5; в) 5.

Задача № 1045

$$\vec{a}\{x; y\}, \vec{b}\{-y; x\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (-y) + y \cdot x = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Задача № 1046

$$\vec{i} \{1; 0\}, \vec{j} \{0; 1\} \Rightarrow \vec{i} + \vec{j} = \{1; 1\}, \quad \vec{i} - \vec{j} = \{1; -1\} \Rightarrow$$

$$(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

Таким образом, $(\vec{i} + \vec{j})$ и $(\vec{i} - \vec{j})$ перпендикулярны.

VI. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Пп. 103, 104; вопросы 17–20.

Решить задачи № 54, 56 (из рабочей тетради), № 1044 б), 1047 б).

Урок 36

**Применение скалярного произведения векторов
при решении задач**

Цели урока:

- Показать примеры решения задач на применение скалярного произведения векторов.
- Закрепление теоретического материала изучаемой темы.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся****Проверка домашнего задания**

Проверить решение задач № 54, № 55 из рабочей тетради.

Один из учащихся читает решение задачи по своей рабочей тетради, остальные внимательно его слушают. Затем учитель дает команду задать отвечающему ученику 4–5 вопросов по изучаемой теме. Если ученик не смог ответить на поставленный вопрос, то можно переадресовать вопрос любому другому учащемуся.

Индивидуальная работа по карточкам

(Проводится во время проверки домашнего задания.)

I уровень (карточка № 1)

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , $AC = 6$, $AB = 3$.

Найдите: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

2. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a} \{2; -3\}$ и $\vec{b} \{-2; \frac{1}{3}\}$;

б) $\vec{i}$ и $\vec{c} \{4; 0\}$.

II уровень (карточка № 2)

1. В треугольнике MNK $MN = NK$, NE – биссектриса, $F \in NE$. $NE = 5$, $MN = 10$.

Найдите: а) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MK}$; б) $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{FN} + \overrightarrow{KP}$; в) $\overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{KN}$.

2. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}\{3; -4\}$ и $\vec{b}\{-2; 0\}$;

б) $\vec{i} - \vec{j}$ и $2\vec{i} + 3\vec{j}$, если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы.

III уровень (карточка № 3)

1. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, AD и BC – основания, $BC = 6$, $AD = 10$, $\angle CAD = 30^\circ$.

Найдите: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

2. При каком значении x векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярны, если известно, что $A(x; 3)$, $B(1; 1)$, $C(-2; 4)$?

Решение задач (устно)

Дано: $\vec{a}\{3; -4\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$, $\vec{c}\{-2; -1,5\}$.

1. Найдите: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$; $\vec{c} \cdot \vec{a}$.

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{c}$ и $\vec{a}$?

3. Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{a}$ и $\vec{c}$?

4. Найдите абсциссу вектора $\vec{d}$, если известно, что его ордината равна 4 и $\vec{d} \perp \vec{b}$.

5. Найдите $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$.

III. Решение задач

1. Разобрать решение задач № 58, № 60 из рабочей тетради.

Один из учащихся читает вслух решение задачи из рабочей тетради, заполняя пропуски. Если кто-то с решением не согласен, то исправляет его. По окончании менее подготовленным учащимся можно задать следующие вопросы, контролирующие уровень понимания решения задачи:

– Какая формула используется для вычисления косинуса угла между векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$?

– Какие свойства скалярного произведения векторов вам известны?

2. Решить самостоятельно задачи:

I уровень – № 1048, № 1051, № 1053;

II уровень – № 1048, № 1051, № 1053, № 1054.

Задача № 1048

Решение:

$$\text{Если } \vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}, \text{ то } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

$$1) \overrightarrow{AB}\{-1-2; 5-8\} = \overrightarrow{AB}\{-3; -3\}$$

$$\overrightarrow{AC} \{3 - 2; 1 - 8\} = \overrightarrow{AC} \{1; -7\};$$

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-7)}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{3}{5}.$$

$$2) \overrightarrow{BA} \{3; 3\};$$

$$\overrightarrow{BC} \{3 + 1; 1 - 5\} = \overrightarrow{BC} \{4; -4\};$$

$$\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2}} = 0.$$

$$3) \overrightarrow{CA} \{-1; 7\}, \overrightarrow{CB} \{-4; 4\};$$

$$\cos C = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{-1 \cdot (-4) + 7 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2}} = \frac{4 + 28}{5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \cos A = \frac{3}{5}; \cos B = 0; \cos C = \frac{4}{5}.$$

Задача № 1051*Решение:*

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{c}) + |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{c}) = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Ответ: 3.**Задача № 1053***Решение:*

Т. к. $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы, то $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 90^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3\vec{p} - 2\vec{q})(\vec{p} + 4\vec{q}) = 3\vec{p}^2 - 2\vec{p}\vec{q} + 12\vec{p}\vec{q} - 8\vec{q}^2 = \\ &= 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ + 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ - 8 = -5. \end{aligned}$$

Ответ: -5.**IV. Подведение итогов****Домашнее задание***Решить задачи:**I уровень* – № 59 (из рабочей тетради), № 1049, № 1050, № 1052;*II уровень* – № 1049, № 1050, № 1052, № 1055.**Урок 37****Решение задач. Подготовка к контрольной работе****Цели урока:**

- Подготовить учащихся к контрольной работе.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

1. Индивидуально проверить № 59 из рабочей тетради (собрать рабочие тетради у 3–4 учащихся).

2. Подготовить решение задачи № 1049 на доске и проверить его правильность.

Задача № 1049

Решение: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$.

$$1) \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AB}\{1+1; -\sqrt{3}-\sqrt{3}\} = \overrightarrow{AB}\{2; -2\sqrt{3}\}; \quad \overrightarrow{AC}\{\frac{1}{2}+1; \sqrt{3}-\sqrt{3}\} = \overrightarrow{AC}\{1,5; 0\}.$$

$$\cos A = \frac{2 \cdot 1,5 - 2\sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1,5^2 + 0^2}} = \frac{3}{4 \cdot 1,5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 60^\circ.$$

$$2) \cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{BA}\{-2; 2\sqrt{3}\}; \quad \overrightarrow{BC}\{\frac{1}{2}-1; \sqrt{3}+\sqrt{3}\} = \overrightarrow{BC}\{-0,5; 2\sqrt{3}\}.$$

$$\cos B = \frac{-2 \cdot (-0,5) + 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(-0,5)^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{1+12}{4 \cdot 3,5} = \frac{13}{14}$$

$$\text{Т. е. } \angle B \approx 21^\circ 47'.$$

$$3) \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) \approx 180^\circ - (60^\circ + 21^\circ 47') = 98^\circ 13'$$

Ответ: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B \approx 21^\circ 47'$, $\angle C \approx 98^\circ 13'$.

3. Обсудить решение задачи № 1055.

Вопросы для обсуждения:

- Почему $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA} = \vec{a} - 2\vec{b}$? $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB} = \vec{b} - 2\vec{a}$?
- Объясните, почему $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$.
- Как из равенства $0 = 5a^2 \cos C - 4a^2$ получили $\cos C = \frac{4}{5}$?

III. Математический диктант

После написания диктанта проводится самопроверка и обсуждение задач, с которыми не справились большинство учащихся.

I вариант

1. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle A = 45^\circ$, $AB = 4$, $AC = 7$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AB равна $\sqrt{2}$, угол при основании равен 30° . Найдите периметр треугольника.
3. Стороны треугольника равны 4, 5 и 6. Найдите косинус угла, лежащего против меньшей стороны.
4. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, $AB = BC$, BD – медиана треугольника, $AC = 2\sqrt{2}$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD}$.
5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a} \{3; -4\}$ и $\vec{b} \{15; 8\}$.
6. Найдите значение x , если известно, что $\vec{a} \{2; -3\}$ и $\vec{b} \{x; -4\}$ перпендикулярны.
7. Найдите высоту BD треугольника ABC , если $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle ABC = 60^\circ$.

II вариант

1. Найдите площадь треугольника CDE , если $\angle C = 60^\circ$, $CD = 6$, $CE = 8$.
2. В равнобедренном треугольнике MNK боковая сторона равна $\sqrt{3}$, угол при вершине равен 120° . Найдите периметр треугольника.
3. Стороны треугольника равны 6, 7 и 8. Найдите косинус угла, лежащего против большей стороны.
4. В треугольнике MNK NP – биссектриса, $MN = 2$, $MP = NK$, $\angle N = 60^\circ$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MK}$; б) $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NK}$; в) $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{MK}$.
5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a} \{-4; 5\}$ и $\vec{b} \{5; -4\}$.
6. Найдите значение y , если известно, что $\vec{a} \{3; y\}$ и $\vec{b} \{2; -6\}$ перпендикулярны.
7. Найдите высоту MN треугольника PMK , если $PM = 3$, $MK = 4$, $\angle PMK = 120^\circ$.

Ответы к математическому диктанту:

I вариант

1. $7\sqrt{2}$;
2. $\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3}$;
3. $\frac{3}{4}$;
4. а) 0; б) 2; в) 2;

II вариант

1. $12\sqrt{3}$;
2. $3 + \sqrt{3}$;
3. $\frac{1}{4}$;
4. а) 0; б) 3, в) -4;

5. $\frac{13}{85}$;

5. $-\frac{40}{41}$;

6. -6 ;

6. 1 ;

7. $\frac{6\sqrt{21}}{7}$

7. $\frac{6\sqrt{111}}{37}$

IV. Самостоятельное решение задач*I* уровень – № 1065, № 1066, № 1071, № 1069.*II* уровень – № 1067, № 1068, № 1070, № 1071, № 1072.**Задача № 1065**Дано: $A(3; 0)$, $B(1; 5)$, $C(2; 1)$.Доказать: $\triangle ABC$ – тупоугольный.

Найти: косинус тупого угла.

Доказательство (рис. 218):

Найдем стороны треугольника ABC .

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{29}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{17}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \angle C$

$$\Rightarrow \cos \angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{17 + 2 - 29}{2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

Т. к. $\cos \angle C < 0$, то $\angle C$ тупой, т. е. $\triangle ABC$ – тупоугольный.**Задача № 1066**Дано: $3\vec{i} - 4\vec{j} = \vec{a}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы.Найти: $|\vec{a}|$.Решение: Т. к. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, то $\vec{a} \in \{3; -4\}$.

$$\text{Тогда } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

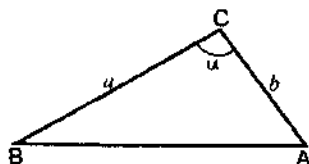
Ответ: $|\vec{a}| = 5$.**Задача № 1067**Дано $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 45^\circ$.Найти: AC , BD (рис. 219).

Рис 218

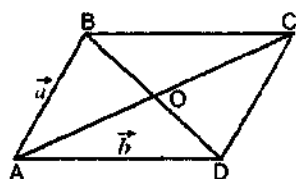


Рис 219

Решение: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{p} - 3\vec{q} = 6\vec{p} - \vec{q}$.

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(6p)^2 + q^2 - 12p \cdot q \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{288 + 9 - 12 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 15$$

$$\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} - 5\vec{p} - 2\vec{q} = -4\vec{p} - 5\vec{q}.$$

$$|\vec{BD}| = \sqrt{16p^2 + 25q^2 + 40p \cdot q \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{16 \cdot 8 + 25 \cdot 9 + 40 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{128 + 225 + 240} = \sqrt{593} \approx 23,4.$$

Ответ: $AC = 15$, $BD \approx 23,4$.

Задача № 1068

Дано: $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 5$; $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. $\vec{p} = x\vec{a} + 17\vec{b}$; и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} \perp \vec{q}$.

Найти: x .

Решение: $\vec{p} \cdot \vec{q} = (x\vec{a} + 17\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3x\vec{a}^2 - x\vec{a}\vec{b} + 51\vec{a}\vec{b} - 17\vec{b}^2$;

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4; \quad \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 25;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = -5.$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 3 \cdot x \cdot 4 - x \cdot (-5) + 51 \cdot (-5) - 17 \cdot 25 = 17x - 680.$$

Т. к. $\vec{p} \perp \vec{q}$, то $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, т. е. $17x - 680 = 0$, откуда $x = 40$.

Ответ: $x = 40$

Задача № 1069

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $AC = CB$; AA_1, BB_1 — медианы.

Найти: $\angle BOA_1$.

Решение (рис. 220): Пусть $BC = AC = 2a$. Из $\triangle BCB_1$ по теореме

Пифагора: $BB_1^2 = BC^2 + CB_1^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BB_1 = a\sqrt{5}; \quad AA_1 = a\sqrt{5}. \quad \vec{BB_1} = \vec{CB_1} - \vec{CB}; \quad \vec{AA_1} = \vec{CA_1} - \vec{CA}.$$

$$\begin{aligned} \vec{BB_1} \cdot \vec{AA_1} &= (\vec{CB_1} - \vec{CB}) \cdot (\vec{CA_1} - \vec{CA}) = \\ &= \vec{CB_1} \cdot \vec{CA_1} - \vec{CB_1} \cdot \vec{CA} - \vec{CB} \cdot \vec{CA_1} + \vec{CB} \cdot \vec{CA}. \end{aligned}$$

Т. к. $CB \perp CA$ ($\angle C = 90^\circ$), то $\vec{CB_1} \cdot \vec{CA_1} = 0$, $\vec{CB} \cdot \vec{CA} = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \vec{BB_1} \cdot \vec{AA_1} &= -\vec{CB_1} \cdot \vec{CA} - \vec{CB} \cdot \vec{CA_1} = \\ &= (|\vec{CB_1}| \cdot |\vec{CA}| \cdot \cos 0^\circ + |\vec{CB}| \cdot |\vec{CA_1}| \cdot \cos 0^\circ) = \\ &= -(a \cdot 2a + 2a \cdot a) = -4a^2. \end{aligned}$$

$$\cos \angle BOA_1 = \frac{|\vec{BB_1} \cdot \vec{AA_1}|}{|\vec{BB_1}| \cdot |\vec{AA_1}|} = \frac{|-4a^2|}{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5}} =$$

$$= 0,8 \Rightarrow \angle BOA_1 \approx 36^\circ 51'.$$

Ответ: $\approx 36^\circ 51'$.

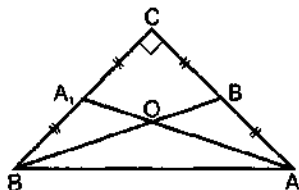


Рис. 220

Задача № 1070

Дано: $ABCD$ – трапеция, $AD = 16$ см, $BC = 8$ см, $CD = 4\sqrt{7}$ см,
 $\angle ADC = 60^\circ$; $S_{ABCC_1} = S_{CC_1D}$.

Найти: S_{ABCD} ; CC_1 .

Решение (рис. 221): Из $\triangle CDH$ ($\angle H = 90^\circ$) $\sin 60^\circ = \frac{CH}{CD} = \frac{CH}{4\sqrt{7}}$,

$$\text{следовательно, } CH = 4\sqrt{7} \cdot \sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{21}.$$

$$\text{Тогда } S_{ABCD} = CH(AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot (16 + 8) = 24\sqrt{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCC_1} = S_{CC_1D} = 12\sqrt{21}.$$

$$\text{Из } \triangle CC_1D = \frac{1}{2} CH \cdot C_1D = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot C_1D = 12\sqrt{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1D = \frac{12\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = 12.$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} CC_1^2 &= CD^2 + C_1D^2 - 2 \cdot CD \cdot C_1D \cdot \cos \angle CDC_1 = \\ &= (4\sqrt{7})^2 + 12^2 - 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 12 \cdot \cos 60^\circ = 112 + 144 - 48\sqrt{7} = \\ &= 256 - 48\sqrt{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } CC_1 = \sqrt{256 - 48\sqrt{7}} = \sqrt{16(16 - 3\sqrt{7})} = 4\sqrt{16 - 3\sqrt{7}}.$$

$$\text{Ответ: } S_{ABCD} = 24\sqrt{21}, CC_1 = 4\sqrt{16 - 3\sqrt{7}}.$$

Задача № 1071

Дано: $\triangle ABC$, $S_{ABC} = 3\sqrt{3}$, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 3$, $\angle A$ – острый.

Найти: радиус описанной окружности.

Решение (рис. 222):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin \angle A = 3\sqrt{3},$$

$$\text{тогда } \sin \angle A = \frac{1}{2}, \angle A = 30^\circ.$$

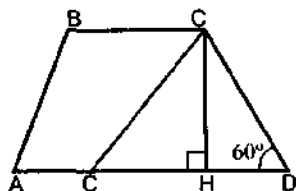


Рис. 221

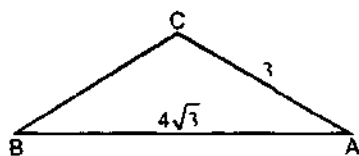


Рис. 222

$$\begin{aligned}\text{По теореме косинусов } CB^2 &= AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle A = \\ &= 9 + 48 - 2 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 57 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 57 - 36 = 21.\end{aligned}$$

$$CB = \sqrt{21}.$$

$$\text{По теореме синусов } \frac{CB}{\sin A} = 2R,$$

$$\text{тогда } \frac{\sqrt{21}}{\sin 30^\circ} = 21 : \frac{1}{2} = 2\sqrt{21} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{21}.$$

$$\text{Ответ: } R = \sqrt{21}.$$

Задача № 1072

Дано $MNKP$ – ромб, MF – биссектриса $\angle PMQ$, $\angle NMQ = 4\alpha$, $FQ = a$.

Найти: S_{MNPQ} .

Решение (рис. 223):

$\angle NMQ = 4\alpha$, MP – биссектриса $\angle NMQ$,

MF – биссектриса $\angle PMQ$

Тогда $\angle FMQ = \angle FMP = \alpha$, $\angle QMP = 2\alpha$,

$\angle MQF = 180^\circ - 4\alpha$.

Из $\triangle MFQ$ по теореме синусов:

$$\begin{aligned}\frac{FQ}{\sin \angle FMQ} &= \frac{MF}{\sin \angle MQF} \\ \Rightarrow MF &= \frac{FQ \cdot \sin \angle MQF}{\sin \angle FMQ} = \frac{a \cdot \sin(180^\circ - 4\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \sin 4\alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

$$\text{Из } \triangle MPQ \text{ по теореме синусов } \frac{MF}{\sin \angle QMP} = \frac{FP}{\sin \angle PMF}.$$

$$\begin{aligned}\text{Тогда } FP &= \frac{MF \cdot \sin \angle PMF}{\sin \angle QMP} = \frac{MF \cdot \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{a \cdot \sin 4\alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \\ &= \frac{a \cdot \sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2a \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

$$PQ = PF + FQ = 2a \cos 2\alpha + a = a(2 \cos 2\alpha + 1)$$

$$S_{MNPQ} = PQ^2 \cdot \sin 4\alpha = a^2(4 \cos^2 2\alpha + 1 + 4 \cos 2\alpha) \cdot \sin 4\alpha$$

$$\text{Ответ: } S_{MNPQ} = a^2 \sin 4\alpha (4 \cos^2 2\alpha + 1 + 4 \cos 2\alpha).$$

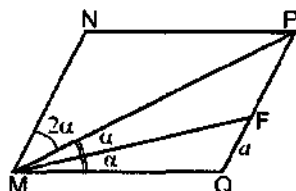


Рис. 223

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Решить задачи: I уровень – № 1, 2, 3, 4; II уровень – № 3, 4, 5, 6.

Условия задач

1. Решите $\triangle MNK$, если $\angle N = 30^\circ$, $\angle K = 105^\circ$, $NK = 3\sqrt{2}$.

- Найдите косинусы углов треугольника ABC , если $A(1; 7)$, $B(-2; 4)$, $C(2; 0)$.
- Две стороны треугольника равны 4 см и 7 см, а косинус угла между ними равен $-\frac{2}{7}$. Определите синусы всех углов данного треугольника и его третью сторону.
- $ABCD$ – ромб, $AB = 6$, $\angle A = 60^\circ$.
Найдите: 1) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; 2) $\overline{AD} \cdot \overline{DB}$; 3) $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{AB} - \overline{AD})$.
- Даны два перпендикулярных отрезка EK и PM , $E(-3; 1)$, $K(1; 4)$, $M(2; 1)$, $P(-4; a)$.
а) Найдите значение a .
б) Найдите угол между прямыми PE и EK .
- Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $\vec{m} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \{2; -1\}$, $|\vec{m}| = \sqrt{80}$, а угол между вектором $\vec{m}$ и осью Oy тупой.

Урок 38

Контрольная работа по теме:

«Соотношение между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов».

I уровень

I вариант

- В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$.
Найдите AC .
- Две стороны треугольника равны 7 см и 8 см, а угол между ними равен 120° . Найдите третью сторону треугольника.
- Определите вид треугольника ABC , если $A(3; 9)$, $B(0; 6)$, $C(4; 2)$.
- * В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle CAB = 30^\circ$, AE – биссектриса, $BE = 8$ см. Найдите площадь треугольника ABC .

II вариант

- В треугольнике CDE $\angle C = 30^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, $CE = 5\sqrt{2}$.
Найдите DE .
- Две стороны треугольника равны 5 см и 7 см, а угол между ними равен 60° . Найдите третью сторону треугольника.
- * В ромбе $ABCD$ AK – биссектриса угла CAB , $\angle BAD = 60^\circ$, $BK = 12$ см. Найдите площадь ромба.

II уровень

I вариант

- В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, а его площадь равна $12\sqrt{2}$ см². Найдите третью сторону треугольника, если известно, что угол A – тупой.

2. В треугольнике MNK $\angle M = \alpha$, $\angle N = \beta$, $NK = a$. Определите стороны треугольника и его площадь.
3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$ см, $AD = 5\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45^\circ$. Найдите диагонали параллелограмма.
4. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(2; -2)$, $D(-2; -1)$. Найдите синус угла между его диагоналями.

II вариант

1. В треугольнике ABC $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, а его площадь равна $5\sqrt{3}$ см². Найдите третью сторону треугольника, если известно, что угол B – острый.
2. В треугольнике KME $\angle K = \alpha$, $\angle M = \beta$, $ME = b$. Найдите стороны треугольника и его площадь.
3. В параллелограмме $MNKP$ $MN = 8$ см, $MP = 7\sqrt{3}$ см, $\angle M = 30^\circ$. Найдите диагонали параллелограмма.
4. Четырехугольник $MNKP$ задан координатами своих вершин $M(5; -3)$, $N(1; 2)$, $K(4; 4)$, $P(6; 1)$. Найдите синус угла между его диагоналями.

III уровень**I вариант**

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $\angle ABC = 100^\circ$, E – середина BC , $\angle EAD = 30^\circ$. Найдите площадь параллелограмма и радиус описанной около треугольника ABE окружности.
2. Даны точки $A(-1; 4)$, $B(1; -2)$, $C(0; -4)$, $D(2; 2)$, E и F – середины AB и CD соответственно. Найдите угол между прямыми EF и CD . Вычислите $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD}$.
3. Точка M лежит внутри угла, равного α , на расстоянии a и b от сторон этого угла. Определите расстояние от точки M до вершины угла.
- 4.* Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $\vec{b} \{1; -3\}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ и угол между $\vec{a}$ и осью Ox острый.

II вариант

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол A равен 65° . Через сторону AB проведена прямая, пересекающая BC в точке K , $\angle KEB = 20^\circ$. Найдите площадь треугольника BEK и радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BK = 5$.
2. Даны два отрезка EK и PM , причем $EK \perp PM$, $E(-3; 1)$, $K(1; 4)$, $M(2; 1)$, $P(-4; 0)$. Найдите острый угол между прямыми PE и EK . Вычислите $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KP}$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AC = m$, $DC = n$, $\angle ABD = \alpha$. Найдите диагональ BD .
4. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $\vec{m} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \{2; -1\}$, $|\vec{m}| = 4\sqrt{5}$ и угол между вектором $\vec{m}$ и осью Oy тупой.

Ответы к задачам контрольной работы

I уровень

I вариант

- $AC = 3\sqrt{3}$
- 13 см
- прямоугольный
- $\approx 75,7 \text{ см}^2$

II вариант

- $DE = 5$
- $\sqrt{39}$ см
- прямоугольный
- $\approx 930,97 \text{ см}^2$

II уровень

I вариант

- $2\sqrt{25+12\sqrt{2}}$ см
- $MN = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$, $MK = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$, $S = \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{2 \sin \alpha}$.
- $BD = \sqrt{26}$ см, $AC = \sqrt{106}$ см.
- $\frac{9}{\sqrt{82}}$

II вариант

- $\sqrt{21}$ см
- $KM = \frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$, $KE = \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha}$, $S = \frac{b^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{2 \sin \alpha}$.
- $NP = \sqrt{43}$ см, $MN = \sqrt{379}$ см.
- $\frac{17}{5\sqrt{13}}$

III уровень

I вариант

- $S \approx 75,4$; $R = 5$
- 45° ; -40 .
- $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$
- $\vec{a} \{3; 1\}$

II вариант

- $S \approx 26,3$; $R \approx 15,1$
- $\approx 60^\circ$; 0 .
- $\frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha}}{\sin \alpha}$
- $\vec{m} \{-2; -4\}$

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

В этой главе рассматриваются правильные многоугольники, доказываются теоремы об описанной и вписанной в правильный многоугольник окружностях, выводятся формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны, радиусов вписанных и описанных окружностей. Используя интуитивное представление о пределе, выводятся формулы длины окружности и площади круга.

Основная цель данной главы – расширение и систематизация знаний учащихся об окружностях и многоугольниках, отработка навыков решения задач на вычисление площадей и сторон правильных многоугольников, радиусов вписанных и описанных окружностей, длины дуги окружности и площади круга, кругового сектора, решения задач на построение правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки.

Урок 39 Правильный многоугольник

Цели урока:

- Повторение формулы суммы углов выпуклого многоугольника, свойств биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку, теорем об окружностях, вписанной и описанной около треугольника, признака равнобедренного треугольника, свойства касательной к окружности с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала.
- Ввести понятие правильного многоугольника.
- Вывести формулу для вычисления угла правильного n -угольника и показать ее применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Решение задач с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала.

I уровень – устно с подробным обсуждением хода решения (особое внимание уделить повторению теории, необходимой для решения задач).

II уровень – самостоятельное решение задач наиболее подготовленными учащимися (тетради учащихся собрать в конце урока на проверку)

Задачи для I уровня

1. Найти сумму углов правильного восьмиугольника.
2. Все углы выпуклого шестиугольника равны. Найдите величину одного угла.
3. Рис. 224. BE – биссектриса угла ABC , точка E удалена от стороны BC на расстояние, равное 5 см. Найдите расстояние от точки E до стороны AB .
4. Рис. 225. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр MN к стороне AC равен ее половине. Докажите, что $AB > MC$.
5. Вычислите радиусы вписанной и описанной около треугольника окружностей, если известно, что стороны треугольника равны 5, 6 и 7 см.

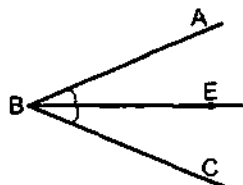


Рис. 224

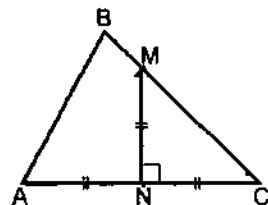


Рис. 225

Задачи для II уровня

1. Вычислите углы выпуклого семиугольника если известно, что четыре его угла пропорциональны числам 1, 2, 3 и 4, а каждый из оставшихся трех на 40° больше меньшего из них. (Ответ: $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 100^\circ, 100^\circ, 100^\circ$.)
2. Во внутренней области треугольника ABC взята точка O , равноудаленная от его сторон. Найдите угол AOC , если $\angle ABO = 39^\circ$. (Ответ: 129° .)
3. В треугольнике ABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите OA , если $BB_1 = 36$ см, $CC_1 = 15$ см. (Ответ: 26 см.)
4. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а проведенная к нему высота равна 12 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей. (Ответ: 4,5 см и $9\frac{3}{8}$ см.)

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие правильного многоугольника.

Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если все его углы равны и все его стороны равны

- Какой треугольник является правильным? Почему? (*Равносторонний, т. к. все его стороны равны и все его углы равны.*)
- Является ли правильным четырехугольником прямоугольник, ромб, квадрат? Почему?

При обсуждении ответов на данный вопрос обратить внимание на то, что:

- а) хотя в прямоугольнике все углы равны, он не является правильным, т. к. не все его стороны равны (т. е. одно из условий правильного многоугольника не выполняется);
- б) в ромбе все стороны равны, но не все углы равны;
- в) квадрат – правильный многоугольник, т. к. во-первых, все его стороны равны, во-вторых, все его углы равны (т. е. выполняются оба условия из определения правильного многоугольника).

2. Работа в творческих группах

Учащиеся делятся на группы по 3–4 ученика в каждой и решают задачу в течение 3–5 минут.

Задача: Чему равен каждый из углов правильного а) десятиугольника; б) n -угольника?

3. Обсуждение решения задачи.

Заслушиваются варианты решений нескольких групп, выявляется наиболее рациональный способ решения.

Возможные варианты решений:

- а) Сумма углов выпуклого десятиугольника: $180^\circ \cdot (10 - 2) = 1440^\circ$.
Т. к. все углы правильного десятиугольника равны, то каждый из них равен $1440^\circ : 10 = 144^\circ$.
- б) Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$. Т. к. все n углов правильного n -угольника равны, то каждый из них равен $\frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}$.

На доске и в тетрадях учащихся записывается формула для вычисления угла правильного n -угольника:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}$$

IV. Закрепление изученного материала

1. Разобрать решение задачи № 64 из рабочей тетради.

(*Ответ: а) 6; б) 72.*)

2. Самостоятельное решение задач

В зависимости от уровня подготовки учащиеся делятся на две группы:

I уровень – решить задачи № 1081 (б, д), 1083 (а, в) из учебника, № 63 из рабочей тетради.

II уровень – решить задачи № 1081 (д), 1083 (в), 1082 из учебника и дополнительные задачи № 1, 2.

В процессе самостоятельного решения задач учитель оказывает индивидуальную помощь, по необходимости контролирует правильность решения задач менее подготовленными учащимися.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что в правильном пятиугольнике диагонали, выходящие из одной вершины, делят угол при данной вершине на три равные части.

2. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, его площадь равна 60 см^2 . Найдите площади треугольников ABC и ACD .

3. От каждой вершины квадрата на его сторонах отложены отрезки, делящие сторону квадрата в отношении $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{2}$. Определите вид полученного восьмиугольника.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 105, вопросы 1, 2.

Решить задачи:

I уровень – № 61, 62 из рабочей тетради, № 1081 (в, г), 1083 (б, г) из учебника;

II уровень – № 1081 (в, г), 1083 (б, г) из учебника, дополнительную задачу № 3.

Урок 40

Окружность, описанная около правильного многоугольника и вписанная в правильный многоугольник

Цели урока:

- Повторить понятие окружностей, вписанной в многоугольник и описанной около него.
- Доказать теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос (фронтальная работа с классом).

- Какой многоугольник называется правильным?
- Выведите формулу для вычисления угла правильного n -угольника.
- Чему равна сумма внешних углов правильного многоугольника, взятых по одному при каждой вершине?
- Выведите формулу для вычисления внешнего угла правильного n -угольника.

2. Решение задач.

Несколько учащихся получают индивидуальные карточки, остальные самостоятельно решают задачи, заранее подготовленные на доске. В это же время учитель беседует с группой учащихся (3–4 ученика) по вопросам задач № 1078, 1079, 1080 учебника.

Карточки для индивидуальной работы

I уровень (карточка № 1)

1. Найдите углы правильного двенадцатиугольника.
2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен 144° ?
3. Найдите внешний угол правильного пятнадцатиугольника.

II уровень (карточка № 2)

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его внешний угол в два раза меньше внутреннего?
2. Докажите, что четыре вершины правильного восьмиугольника, взятые через одну, служат вершинами квадрата.
3. Площадь правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см². Найдите его периметр.

III уровень (карточка № 3)

1. Докажите, что в правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагональ AC делит его на две фигуры, площади которых пропорциональны числам 1 и 5.
2. Три вершины правильного шестиугольника, взятые через одну, служат вершинами треугольника. Найдите отношение периметров данного шестиугольника и полученного треугольника.
3. Можно ли покрыть плоскость правильными треугольниками и правильными шестиугольниками без просветов? Ответ обоснуйте.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите углы правильного шестнадцатиугольника.
2. Каждый угол правильного многоугольника равен 162° . Найдите число его сторон.
3. Чему равен внешний угол правильного восемнадцатиугольника?
4. Внешний угол правильного многоугольника равен 15° . Найдите число его сторон.
5. Является ли равнобедренный треугольник с углом при вершине в 60° правильным? Ответ обоснуйте.
6. Является ли ромб с равными диагоналями правильным четырехугольником? Ответ обоснуйте.
7. Диагональ AD делит шестиугольник $ABCDEF$ на две равнобедренные трапеции. Является ли $ABCDEF$ правильным шестиугольником? Ответ обоснуйте.

8. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ проведены диагонали AC , AD , AE . Найдите площади получившихся треугольников, если площадь шестиугольника равна 42 см^2 .

Ответы:

- | | |
|------------------|--|
| 1. $157,5^\circ$ | 2. 20 |
| 3. 20° | 4. 24° |
| 5. Да | 6. Да |
| 7. Не всегда | 8. 7 см^2 , 14 см^2 , 14 см^2 , 7 см^2 . |

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие окружности, описанной около многоугольника.

Вопросы для обсуждения:

- Какая окружность называется описанной около многоугольника? (Окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности.)
- Можно ли описать окружность около произвольного треугольника? произвольного четырехугольника? (Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Около четырехугольника можно описать окружность, если сумма его противоположных углов равна 180° .)
- Приведите примеры четырехугольников, около которых можно описать окружность. (Окружность можно описать около прямоугольника, квадрата, равнобедренной трапеции и всех других четырехугольников, в которых сумма противоположных углов равна 180° .)
- Можно ли описать окружность около выпуклого многоугольника? правильного многоугольника? (Ответы на данный вопрос могут быть самыми разнообразными, причем вряд ли кто-либо из учащихся сможет обосновать свой ответ.)

Учитель делает вывод:

- Оказывается, не всегда удастся описать окружность около любого выпуклого многоугольника. А вот около правильного многоугольника можно всегда описать окружность, и притом только одну.

2. Доказательство теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника.

Теорема. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Дано: $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – правильный многоугольник (см. рис. 226).

Доказать:

- 1) около $A_1A_2A_3 \dots A_n$ можно описать окружность;
- 2) описанная окружность единственная.

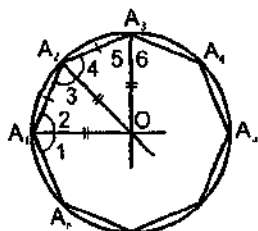


Рис 226

Доказательство (доказательство проводится в форме обсуждения вопросов учителя):

- Предположим, около данного многоугольника можно описать окружность. Где может находиться центр данной окружности?

Возможные ответы:

- а) в точке пересечения биссектрис углов многоугольника;
- б) в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам данного многоугольника.
- Совпадут ли точки пересечения биссектрис и точки пересечения серединных перпендикуляров? (Да.)
- Проведем биссектрисы углов A_1 и A_2 . Что можно сказать о полученном треугольнике A_1OA_2 , если O – точка пересечения биссектрис? ($\angle 2 = \angle 3$, т. к. $\angle A_1 = \angle A_2$ как углы правильного многоугольника, A_1O и A_2O их биссектрисы $\Rightarrow \triangle A_1OA_2$ – равнобедренный, т. е. $OA_1 = OA_2$.)
- Если соединить точку A_3 с точкой O , будут ли равны отрезки OA_3 , OA_2 ? ($OA_3 = OA_2$, потому что $\triangle A_1A_2O = \triangle A_2A_3O$ по двум сторонам и углу между ними, т. к. $A_1A_2 = A_2A_3$, OA_2 – общая сторона, $\angle 3 = \angle 4$.)
- Можно ли утверждать, что A_3O также является биссектрисой данного многоугольника? (Да, т. к. $OA_3 = OA_2$, тогда $\triangle A_2OA_3$ равнобедренный, поэтому $\angle 5 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle A_2 = \frac{1}{2} \angle A_3 \Rightarrow \angle 6 = \frac{1}{2} \angle A_3$, т. е. A_3O – биссектриса угла A_3 .)
- Как расположена точка по отношению к вершинам многоугольника? (Если продолжить соединять точки $A_4, A_5, \dots, A_n$ с точкой O , то получим $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от вершин многоугольника и является центром описанной около него окружности.)

Вывод: около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

- Сколько таких окружностей можно описать около многоугольника? Ответ обоснуйте. (Возьмем три вершины многоугольника (например, A_1, A_2, A_3). Через эти точки проходит только одна окружность, поэтому и около данного многоугольника можно описать только одну окружность.)

Вывод: около любого правильного многоугольника можно описать только одну окружность.

3. Ввести понятие окружности, вписанной в многоугольник.

Вопросы для обсуждения:

- Какая окружность называется вписанной в многоугольник? (Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.)

- Можно ли вписать окружность в произвольный треугольник, четырехугольник? (В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, если суммы длин его противоположных сторон равны.)
- Приведите примеры четырехугольников, в которые можно вписать окружность. (Окружность можно вписать в ромб, квадрат и в любой другой выпуклый четырехугольник, в котором равны суммы противоположных сторон.)
- Где расположен центр окружности, вписанной в треугольник? Чему равен ее радиус? (Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис, а его радиус равен длине перпендикуляра, опущенного из точки пересечения биссектрис к стороне треугольника.)
- Можно ли вписать окружность в многоугольник? (Ответы на этот вопрос могут быть самыми разнообразными, причем вряд ли кто-либо из учащихся даст полный и правильный ответ.)

Учитель делает вывод:

- Оказывается, не во всякий многоугольник можно вписать окружность, а вот в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Это утверждение получило название теоремы об окружности, вписанной в многоугольник.

4. Доказательство теоремы об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Теорема. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Дано: $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – правильный n -угольник.

Доказать:

- а) в $A_1A_2A_3 \dots A_n$ можно вписать окружность;
- б) данная окружность единственная.

Доказательство:

(Доказательство проводится в форме обсуждения вопросов учителя.)

Вопросы для обсуждения (см. рис. 227):

- Мы знаем, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность. Может ли центр описанной окружности совпадать с центром вписанной в данный многоугольник окружности? Почему? (Центр описанной около правильного многоугольника окружности совпадает с центром вписанной в него окружности, т. к. $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$ как радиусы описанной окружности)



Рис. 227

$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2 = \angle OA_3A_4 = \dots = \angle OA_1A_n$
 т. к. $A_1O, A_2O, A_3O, \dots, A_nO$ – биссектрисы равных углов $A_1A_2A_n, A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \dots$ соответственно, следовательно,
 $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3 = \dots = \angle OA_nA_1$, поэтому их высоты $OH_1,$
 $OH_2, OH_3, \dots, OH_n$ равны, т. е. O – центр окружности, впи-
 санной в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$, точки $H_1, H_2, \dots, H_n$ –
 точки касания.)

- Существует ли еще какая-нибудь окружность, вписанная в этот же правильный многоугольник? Почему? (Если бы такая окружность существовала, то ее центр был бы равноудален от сторон многоугольника, т. е. он лежал бы на каждой из биссектрис углов многоугольника. В таком случае центр первой окружности совпадает с центром второй окружности, а радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, то есть радиусу первой окружности.)

5. Изучение следствий 1 и 2 и их доказательство.

Задание для самостоятельной работы:

I вариант: Докажите, что окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

II вариант: Докажите, что центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Доказательства заслушать и обсудить.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пп. 106, 107; вопросы 3, 4.

Решить задачи № 184 (б, г, д, е), 185, 186.

Урок 41

Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

Цели урока:

- Ввести формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности.
- Научить учащихся применять указанные формулы в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

Два ученика вызываются к доске для подготовки доказательства теорем о вписанной в правильный многоугольник и описанной около правильного многоугольника окружностях.

Фронтальный опрос (проводится в то время, пока у доски идет подготовка к доказательству теорем).

- Какая формула используется для вычисления суммы углов выпуклого n -угольника?
- Назовите формулу для вычисления угла правильного n -угольника.
- Сформулируйте следствия из теорем о вписанной в правильный многоугольник и описанной около правильного многоугольника окружностях.
- Что вы понимаете под словами центр правильного многоугольника?

Заслушать доказательства теорем, подготовленных у доски.

2. Индивидуальная работа по карточкам (данный этап работы проходит в то же время, что и фронтальный опрос).

I уровень (карточка № 1)

1. Найдите углы правильного восемнадцатиугольника.
2. Угол правильного n -угольника равен 108° . Вычислите количество его сторон.
3. Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна 45° ?

II уровень (карточка № 2)

1. Сумма углов правильного n -угольника равна 1440° . Чему равна сумма углов другого правильного многоугольника, если известно, что вершины первого многоугольника, взятые через одну, служат вершинами второго.
2. Докажите, что в правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и AD делят угол BAE на три равные части.

III уровень (карточка № 3)

1. Вокруг правильного многоугольника описана окружность с радиусом, равным 10 см, и в этот же многоугольник вписана окружность с радиусом, равным 5 см. Чему равно число сторон этого многоугольника?
2. В правильном многоугольнике диагонали MN и KE пересекаются в точке F так, что $MF = 6$ см, $NF = 8$ см, $KE = 16$ см. Найти KF и EF .

III. Изучение нового материала

Вывод формул для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности можно организовать в два этапа.

- а) Решение частной задачи (самостоятельно с последующим обсуждением решения).
- б) Вывод формул в процессе решения задач на доказательство (один из учеников решает у доски, остальные в тетрадах).

Задача 1

В правильный шестиугольник вписана окружность радиуса 8 см.

Найдите: а) сторону шестиугольника; б) площадь шестиугольника; в) радиус описанной около него окружности.

См. рис. 228.

При необходимости можно использовать следующие подсказки и наводящие вопросы:

- Разбейте $ABCDEF$ на треугольники с общей вершиной O .
- Чем является радиус OH вписанной в треугольник AOB окружности?
- Чему равен угол AOB ?
- Вычислите градусную меру угла AOH .
- Перечислите все известные элементы треугольника AOH . Как найти его неизвестные элементы?
- Что можно сказать о площадях треугольников AOB , BOC , COD , DOE , EOF , FOA ?

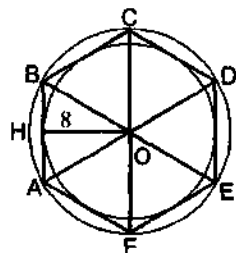


Рис. 228

Задача 2

Докажите, что в правильном n -угольнике $S = \frac{1}{2}Pr$, $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$,

$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$, где a_n – сторона, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, P – периметр, S – площадь многоугольника.

- Чему равна площадь каждого треугольника, полученного при разбиении правильного n -угольника соединением центра данного n -угольника с его вершинами? ($S_\Delta = \frac{1}{2}a_n \cdot r$)
- Найдите площадь всего n -угольника.

$$S = n \cdot \frac{1}{2}a_n \cdot r \quad (1)$$

- Чему равно значение произведения $n \cdot a_n$? ($n \cdot a_n = P$)
- Как в этом случае можно записать формулу (1)? ($S = \frac{1}{2}Pr$)

Итак, формула для вычисления площади правильного многоугольника:

$$S = \frac{1}{2}Pr.$$

- Чему равен $\angle AOB$? $\angle AOH$? ($\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$,
 $\angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$.)

- В $\triangle AOH$ $\angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$, $OA = R$. Найдите HO ,
 AH . ($AH = AO \cdot \sin \angle AOH = R \sin \frac{180^\circ}{n}$; $OH =$
 $= AO \cdot \cos \angle AOH = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.)

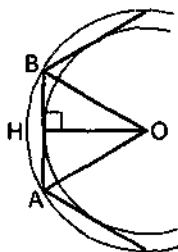


Рис. 229

- Чему равна сторона правильного n -угольника? радиус вписанной окружности? ($AB = 2AH = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$; $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.)

Итак, формулы для вычисления стороны правильного n -угольника и радиуса вписанной в него окружности:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 65.

(Ответ: $a_6 = 8$ см; $R = 8$ см; $P = 48$ см; $S = 96\sqrt{3}$ см².)

2. Разобрать задачу № 1089 учебника.

- Квадрат вписан в окружность. Что нужно знать для определения стороны квадрата? (Для определения стороны квадрата нужно знать радиус описанной около него окружности.)
- Как по известному периметру треугольника можно вычислить радиус описанной около него окружности? (Найдем сторону треугольника, а затем используем формулу $R = 2a_3 \sin \frac{180^\circ}{3}$.)

Далее учащиеся самостоятельно записывают решение задачи:

$$a_3 = P : 3 = 18 : 3 = 6 \text{ (см)}$$

$$R = 2a_3 \sin \frac{180^\circ}{3} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$a_4 = \frac{R}{2 \sin \frac{180^\circ}{4}} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6} \text{ (см)}$$

Ответ: $a_4 = 3\sqrt{6}$ см

3. Решить самостоятельно задачи.

I уровень – № 66 из рабочей тетради, № 1087 (1, 2), 1088 (1, 3).

II уровень – № 66 из рабочей тетради, № 1090, 1091.

Учащимся, успешно справившимся с решением предложенных задач, можно порекомендовать решить дополнительные задачи.

Дополнительные задачи

Задача 1

Центры двух окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды, которая в одной из окружностей является стороной вписанного правильного четырехугольника, а в другой – стороной вписанного правильного треугольника. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если длина указанной хорды равна 8 см.

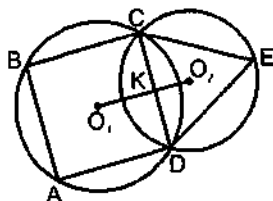


Рис. 230

Решение (рис. 230):

Хорда CD является одновременно стороной правильного четырехугольника и правильного треугольника, вписанных в окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. O_1K и O_2K – радиусы окружностей, вписанных в данные четырехугольник и треугольник.

$O_1K = r_1 = R_1 \cos \frac{180^\circ}{4}$, $O_2K = r_2 = R_2 \cos \frac{180^\circ}{3}$, где R_1 и R_2 – радиусы окружностей, описанных около данных четырехугольника и треугольника, то есть

$$R_1 = \frac{a_4}{2 \sin \frac{180^\circ}{4}} = \frac{8}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2} \text{ (см)},$$

$$R_2 = \frac{a_3}{2 \sin \frac{180^\circ}{3}} = \frac{8}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (см)},$$

$$\text{тогда } O_1K = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ (см)}, O_2K = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}.$$

$$O_1O_2 = O_1K + O_2K = 4 + 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

Задача 2

Сторона правильного двенадцатиугольника $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ равна 4 см. Найдите площадь шестиугольника $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$.

Решение:

Правильные двенадцатиугольник $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ и шестиугольник $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ имеют одну и ту же описанную около них окружность, поэтому $R_{12} = R_6$.

$$R_{12} = \frac{a_{12}}{2 \sin \frac{180^\circ}{12}} = \frac{a_6}{2 \sin \frac{180^\circ}{6}} = R_6$$

$$\frac{a_{12}}{\sin 15^\circ} = \frac{a_6}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{4}{\sin 15^\circ} = \frac{a_6}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_6 = \frac{4}{\sin 15^\circ} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sin 15^\circ} \text{ (см)}$$

Площадь правильного многоугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} Pr.$$

$$P = 6 \cdot a_6 = 6 \cdot \frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{12}{\sin 15^\circ}.$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{6} = R \cos 30^\circ, R = \frac{a_6}{2 \sin \frac{180^\circ}{6}} = a_6 = \frac{12}{\sin 15^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{\sin 15^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} \text{ (см)}.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{\sin 15^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin^2 15^\circ} \approx 155,16 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{6\sqrt{3}}{\sin^2 15^\circ} \approx 155,16 \text{ (см}^2\text{)}$$

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пл. 108; вопросы 5–7.

Решить задачи № 67, 68 из рабочей тетради; задачи № 1087 (3, 5), 1088 (2, 5), 1093 из учебника.

Урок 42

Решение задач по теме «Правильный многоугольник»

Цель урока:

- Рассмотреть некоторые способы построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение формул для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

Три ученика вызываются к доске и получают следующие задания:

- Вывести формулу для вычисления площади правильного многоугольника.
- Вывести формулу для вычисления стороны правильного многоугольника.
- Вывести формулу для вычисления радиуса окружности, вписанной в правильный многоугольник.

2. Математический диктант (с целью проверки знания изученных формул и умения их применять при решении простейших задач) проводится в то время, пока у доски готовится вывод формул.

Задание: в правильном многоугольнике число сторон равно n , а радиус описанной около него окружности равен R . Вычислите сторону, площадь и радиус вписанной в него окружности, если известно, что $n = 3$ (I вариант); $n = 4$ (II вариант); $n = 6$ (III вариант).

В ходе проверки правильности выполнения заданий заполнить таблицу, заранее заготовленную на доске. После того, как таблица будет готова, учащиеся переносят ее в свою тетрадь.

Правильные многоугольники

n	$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$	$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$	$S = \frac{1}{2} P r$
3	$R\sqrt{3}$	$\frac{1}{2} R$	$\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$
4	$R\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} R$	$2R^2$
6	R	$\frac{\sqrt{3}}{2} R$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$

Далее заслушивается вывод формул, подготовленных у доски.

3. Наиболее подготовленным учащимся на данном этапе урока можно предложить решить следующие задачи.

Задача 1

В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно a , прилежащие к этому основанию углы равны 105° , диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

Решение (рис. 231):

I способ

$$\angle ABC = \angle BCD = 105^\circ \Rightarrow \angle BAD = \angle ADC = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Треугольник BOC – равнобедренный прямоугольный, тогда $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$, $\angle ABO = 60^\circ$, $\angle BAO = 30^\circ$.

По теореме Пифагора $BO^2 + CO^2 = BC^2 = a^2$.

$$BO = CO, \text{ тогда } BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

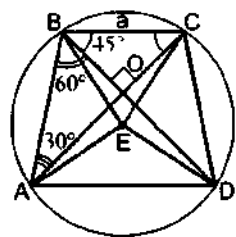


Рис. 231

$$\text{В } \triangle ABO \operatorname{tg} \angle ABO = \frac{AO}{BO} \Rightarrow AO = BO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$BD = BO + OD = BO + AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}).$$

В трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, поэтому $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC$.

$$\begin{aligned} \text{Т. к. } BD = AC, \text{ то } S &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot (1 + \sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = \\ &= \frac{a^2(2 + \sqrt{3})}{2}. \end{aligned}$$

II способ

Опишем около данной трапеции окружность.

Т. к. $\angle BAD = 30^\circ$ (см. I способ), то $\angle BOC = 60^\circ$, а значит центральный угол $\angle BEC = 60^\circ$, где E – центр описанной окружности, отсюда $\triangle BEC$ – равносторонний, $BE = EC = a$ и, соответственно, радиус описанной окружности равен a .

$\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle AOD) \Rightarrow \angle AOD = 2 \cdot \angle BOC - \angle BOC = 2 \cdot 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, тогда $\angle AED = 120^\circ$.

$$\text{В } \triangle AED \text{ по т. косинусов } AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE \cdot DE \cdot \cos \angle AED = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot (-1/2) = 3a^2 \Rightarrow AD = a\sqrt{3}.$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin \angle DAE = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} BE \cdot EC \cdot \sin \angle BEC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Т. к. $\angle BEC = 60^\circ$, $\angle AED = 120^\circ$, то $\angle AEB = \angle CED = 90^\circ$, тогда $S_{ABE} = S_{CDE} = \frac{1}{2} a^2$.

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AED} + S_{BEC} + S_{ABE} + S_{CDE} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + a^2 = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3} + 2a^2}{2} = \frac{a^2(2 + \sqrt{3})}{2}. \end{aligned}$$

Задача 2

В окружность радиуса R вписана трапеция, вершины которой делят окружность в отношении $2 : 3 : 2 : 5$. Найдите площадь трапеции.

Решение (рис. 232):

Т. к. точки A, B, C, D делят окружность в отношении $2 : 3 : 2 : 5$, то $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle AOD = 150^\circ$.

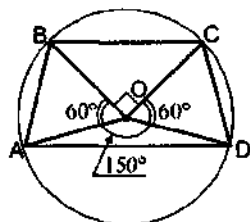


Рис. 232

Если O – центр описанной окружности, то $\angle AOB = \angle COD = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle AOD = 150^\circ$, тогда $S_{AOB} = S_{COD} = \frac{R \cdot R}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$.

$S_{BOC} = \frac{1}{2} R^2$, $S_{AOD} = \frac{1}{4} R^2$, поэтому:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{4} R^2 = R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} R^2 = \frac{R^2}{4} (3 + 2\sqrt{3})$$

III. Изучение нового материала

1. Повторить принцип построения правильных четырехугольника и треугольника.

Задание для учащихся: построить правильный треугольник и четырехугольник, используя циркуль и линейку.

2. Построение правильного шестиугольника, сторона которого равна данному отрезку.

- Какая зависимость существует между стороной правильного шестиугольника и радиусом описанной около него окружности? (*Ответ:* $a_6 = R$.)
- Пусть PQ – заданный отрезок, равный стороне правильного шестиугольника, который нам необходимо построить. Чему равен радиус описанной около этого шестиугольника окружности? (*Ответ:* PQ .)
- Составьте план построения правильного шестиугольника со стороной PQ .

Ответ:

- 1) Построить окружность с радиусом, равным PQ .
- 2) Отметить на окружности произвольную точку A_1 .
- 3) Отметить на окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 , чтобы выполнялось равенство $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$.
- 4) Последовательно соединить отрезками полученные точки. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – искомый шестиугольник.

По ходу составления плана построения правильного шестиугольника нужно выполнять на доске рисунок. Это может сделать один из учащихся или учитель, в зависимости от подготовленности класса.

3. Построение правильных $2n$ -угольников.

Задача 1

Как, используя правильный шестиугольник, построить правильный двенадцатиугольник?

Возможные варианты ответов (см. рис. 233):

а) Провести высоты треугольников A_1A_2O , A_2A_3O , A_3A_4O , A_4A_5O , A_5A_6O , A_6A_1O до пересече-

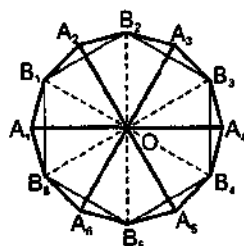


Рис 233

ния с окружностью. Если точки пересечения обозначить $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, то $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$ – искомый двенадцатиугольник.

б) Разделить дуги $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ пополам точками $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$ – искомый двенадцатиугольник.

Задача 2

Составить план построения правильного $2n$ -угольника из имеющегося n -угольника.

Ответ:

- 1) Провести биссектрисы углов правильного n -угольника. Точка пересечения биссектрис O будет являться центром описанной около n -угольника окружности. Построить эту окружность.
- 2) Из точки O опустить перпендикуляры к сторонам правильного n -угольника до пересечения с окружностью.
- 3) Соединить последовательно вершины правильного n -угольника с полученными точками пересечения. Полученный многоугольник – искомый правильный $2n$ -угольник.

IV. Закрепление изученного материала

Решить самостоятельно задачу № 1100 (г). Учитель оказывает индивидуальную помощь по необходимости.

Решить самостоятельно задачи:

I уровень: № 69, 70 (б, в) из рабочей тетради.

II уровень: № 1092, 1094 (а, г).

V. Самостоятельная работа

I уровень

* I вариант

1. Найдите углы правильного пятиугольника.
2. Сторона правильного треугольника, вписанного в некоторую окружность, равна $4\sqrt{3}$. Найдите сторону правильного четырехугольника, описанного около этой же окружности.

II вариант

1. Найдите углы правильного восемнадцатиугольника.
2. Сторона правильного четырехугольника, вписанного в некоторую окружность, равна 2. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой же окружности.

II уровень

* I вариант

1. Сумма углов правильного n -угольника равна 1800° . Найдите его внешние углы.
2. Сторона правильного четырехугольника, описанного около некоторой окружности, равна 8. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

II вариант

1. Сумма углов правильного n -угольника равна 2340° . Найдите его внешние углы.
2. Сторона правильного треугольника, описанного около некоторой окружности, равна $2\sqrt{6}$. Найдите площадь правильного четырехугольника, вписанного в эту же окружность.

III уровень**I вариант**

1. Существует ли правильный многоугольник, у которого каждый угол равен 145° ?
2. Сторона описанного правильного четырехугольника на $\sqrt{3}$ больше стороны правильного треугольника, вписанного в ту же окружность. Найдите сторону треугольника.

II вариант

1. Существует ли правильный многоугольник, у которого каждый угол равен 125° ?
2. Сторона описанного правильного четырехугольника на $\sqrt{6}$ больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в ту же окружность. Найдите сторону четырехугольника.

Ответы к задачам самостоятельной работы**I уровень**

I вариант: 1) 156° ; 2) 8.

II вариант: 1) 160° ; 2) $2\sqrt{6}$.

II уровень

I вариант: 1) 30° ; 2) $12\sqrt{3}$.

II вариант: 1) 24° ; 2) 4.

III уровень

I вариант: 1) нет; 2) $3\sqrt{3} + 6$.

II вариант: 1) нет; 2) $\frac{11\sqrt{6} + 6}{5}$.

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

П.109; вопросы 6, 7.

Решить задачи:

I уровень – № 71 (из рабочей тетради), № 1094 (а, г), № 1095.

II уровень – №№ 1095, 1097, 1098, 1099.

Урок 43

Длина окружности

Цели урока:

- Дать представление о выводе формулы длины окружности.
- Научить учащихся решать задачи на применение формулы длины окружности.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

Вызвать к доске двух учеников, успешно справившихся с самостоятельной работой предыдущего урока, и попросить их оформить на доске рисунок и краткое решение задач № 1095, 1097, а затем заслушать их.

Задача № 1095

Решение (рис. 234):

FF_1E_1E – квадрат, поэтому $F_1F = EF = 1,5$ см, т. е. $a_6 = 1,5$ (см). Найдем радиус вписанной в правильный шестиугольник $ABCDEF$ окружности.

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{6} = R \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

$$R = \frac{a_6}{2 \sin \frac{180^\circ}{6}} = \frac{1,5}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1,5 \text{ (см)}, \text{ тогда } r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1,5 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (см)}.$$

$$S = \frac{1}{2} Pr = \frac{1}{2} (a_6 \cdot 6) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 6 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Задача № 1097

Решение (рис. 235):

$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – вписанный в окружность шестиугольник, значит $R = OE_1 = OF_1 = E_1F_1$.

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = 6 \cdot S_{OE_1F_1} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$$

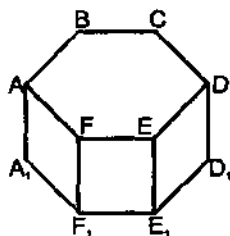


Рис. 234

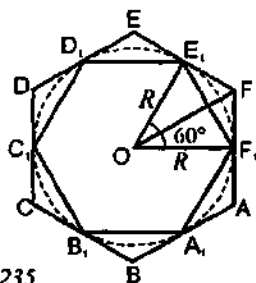


Рис. 235

В $\triangle OFF_1$ FF_1 – катет, лежащий против угла в 30° , т. е.
 $FF_1 = \frac{1}{2} OF$. По теореме Пифагора получаем: $OF_1^2 + FF_1^2 = OF^2$.

Т. к. $OF_1 = R$, то $R^2 + FF_1^2 = 4FF_1^2$, тогда $3FF_1^2 = R^2$, отсюда
 $FF_1 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, $OF = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

$$S_{ABCDFF} = 6 \cdot S_{OAF} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot OF \cdot OA \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{4R^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}R^2. \quad \frac{S_{A,B,C,D,F,F_1}}{S_{ABCDFF}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}{2R^2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$$

Ответ: 3 : 4.

2. Анализ ошибок самостоятельной работы

Решить у доски задачи, с которыми не справились учащиеся.

3. Математический диктант с последующей самопроверкой.

Проводится с целью повторения и подготовки учащихся к восприятию нового материала.

Вариант 1

- 1) Сторона правильного n -угольника, вписанного в окружность с радиусом R , вычисляется по формуле ...
- 2) См. рис. 236. Угол AOB – ...
- 3) Если $\angle AOB = 30^\circ$, то AB – сторона правильного ..., вписанного в данную окружность.
- 4) Градусная мера дуги AB равна 27° , а градусная мера угла AOB равна ...
- 5) Сторона правильного треугольника равна 4 см. Радиус описанной около него окружности равен ...
- 6) Сторона правильного четырехугольника равна 8 см. Радиус вписанной в него окружности равен ...
- 7) Площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности с радиусом 6 см, равна ...

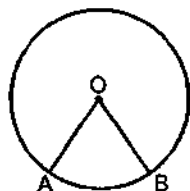


Рис. 236

Вариант 2

- 1) Радиус описанной около правильного n -угольника окружности вычисляется по формуле ...
- 2) См. рис. 237. Угол ABC – ...
- 3) Если $\angle ABC = 18^\circ$, то AC – сторона правильного ..., вписанного в данную окружность.
- 4) Градусная мера дуги AC равна ..., если $\angle AOC = 25^\circ$.

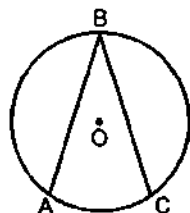


Рис. 237

- 5) Сторона правильного четырехугольника равна 6 см. Радиус описанной около него окружности равен ...
- 6) Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см. Радиус вписанной в него окружности равен ...
- 7) Площадь правильного треугольника, описанного около окружности с радиусом 2 см, равна ...

Ответы к заданиям математического диктанта

Вариант 1: 1) $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$; 2) центральный; 3) двенадцатиугольника; 4) 25° ; 5) $3\sqrt{2}$ см; 6) 2 см; 7) $72\sqrt{3}$ см².

Вариант 2: 1) $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$; 2) вписанный; 3) десятиугольника; 4) 27° ; 5) $2\sqrt{2}$ см; 6) 4 см; 7) $12\sqrt{3}$ см².

III. Изучение нового материала

1. Изложение нового материала можно организовать в виде беседы учителя с учащимися. При этом можно обсудить следующие вопросы:

- Представьте себе, что нам нужно измерить длину проволоки, из которой изготовлен обруч. Каким образом это можно сделать? (*Выпрямить проволоку, из которой изготовлен обруч, и измерить линейкой ее длину. Обтянуть обруч нитью и измерить ее длину.*)
- На доске вычерчена окружность. Как измерить длину этой окружности хотя бы примерно, но как можно точнее?

Учитель должен предупредить учащихся, что формулу для вычисления длины окружности использовать нельзя (она изучалась в курсе математики 5–6 кл.).

Возможные варианты ответов:

- а) С помощью нити.
- б) Вписать многоугольник с большим числом сторон в данную окружность и найти его периметр.

Вывод: Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Это приближенное значение длины окружности при увеличении числа сторон многоугольника практически равно периметру многоугольника. Точное значение длины окружности – это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

2. Вывод формулы длины окружности можно провести в виде небольшой лекции.

Пусть имеются две окружности с радиусами R_1 и R_2 , а их длины равны C_1 и C_2 соответственно. Впишем в каждую из них n -угольники и найдем отношение их периметров P_1 и P_2 . $P_1 = n \cdot a_1$, $P_2 = n \cdot a_2$, где a_1 и a_2 — сторону наших n -угольников. Используя формулу $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, имеем $a_1 = 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}$, $a_2 = 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}$, поэтому $P_1 = n \cdot a_1 = 2nR_1 \sin \frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = n \cdot a_2 = 2nR_2 \sin \frac{180^\circ}{n}$, откуда

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2nR_1 \sin \frac{180^\circ}{n}}{2nR_2 \sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{D_1}{D_2}, \text{ где } D_1 \text{ и } D_2 - \text{ диаметры окружностей.}$$

По свойству пропорций, т. к. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то справедливо равенство

$$\frac{P_1}{D_1} = \frac{P_2}{D_2}.$$

Ранее было установлено, что при $n \rightarrow \infty$ $P_1 \rightarrow C_1$, $P_2 \rightarrow C_2$, поэтому $\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2}$, т. е. отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное. Это число обозначают греческой буквой π (пи).

Итак, $\frac{C}{D} = \pi$ или $C = \pi D = 2\pi R$.

Формула для вычисления длины окружности:

$$C = 2\pi R.$$

Число π является приближенным ($\pi \approx \frac{22}{7}$), его значение было найдено еще в III веке до нашей эры греческим ученым Архимедом. При решении задач чаще используют приближенное значение π , равное 3,14.

3. Вывод формулы длины дуги окружности можно провести в форме ответов на поставленные учителем вопросы.

- Какую часть окружности составляет дуга в 1° ? ($1/360$ часть.)
- Чему равна длина дуги окружности в 1° ? (Длина дуги окружности $l = \frac{C}{360} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$.)
- Чему равна длина дуги окружности с градусной мерой α ? (Длина дуги окружности $l = \frac{\pi R}{180} \alpha$)
- Итак, длина дуги с градусной мерой α равна $l = \frac{\pi R}{180} \alpha$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 72 из рабочей тетради (разобрать решение всем классом).
2. Разобрать решение задачи № 74 из рабочей тетради.
3. Решить задачу № 1104 (г) (один ученик работает у доски, остальные в тетрадях).

№ 1104 (г)

- Что нужно знать для вычисления длины окружности? (Ее радиус.)

Вопрос: См. рис. 238. Покажите радиус окружности на рисунке. Почему диагонали прямоугольника пересекаются в центре окружности, в которую вписан прямоугольник?

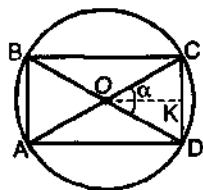


Рис 238

Ответ: OC , OD , OA , OB . Углы прямоугольника прямые, поэтому они, с одной стороны, опираются на диагонали AC и BD , а с другой стороны, на диаметры. Т. к. диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, центр окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей.

Вопрос: В $\triangle OCD$ $CD = a$, $OC = OD$, $\angle COD = \alpha$. Как можно найти OC и OD ?

Ответ:

- а) по теореме косинусов $CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cos \alpha \Rightarrow$
если $CD = a$, $OC = OD = R$, то $a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha \Rightarrow$

$$R^2 = \frac{a^2}{2 - 2 \cos \alpha} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}}.$$

- б) $\triangle OCD$ – равнобедренный. Проведем биссектрису OK , которая также является высотой и медианой. В прямоугольном $\triangle OCK$

$$\angle COK = \frac{\alpha}{2}, CK = \frac{a}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{CK}{OC} \Rightarrow OC = \frac{CK}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = R.$$

Вопрос: Какая формула используется для вычисления длины окружности? Чему она равна?

Ответ: $C = 2\pi R$.

а) Если $R = \frac{a}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}}$, то $C = \frac{2\pi a}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{2}\pi a}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}$.

б) Если $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$, то $C = \frac{2\pi a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

4. Решить самостоятельно задачи № 1104 (а); № 1105 (б, г).

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Урок 44

Длина окружности. Решение задач

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на применение формул длины дуги окружности и длины окружности.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос (фронтальная работа с классом).

- Какая формула используется для вычисления длины окружности?
- Что означает число π и чему равно его приближенное значение?
- По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?

Устно решить № 1103, № 1104.

2. Проверка домашнего задания.

В начале урока попросить двух учащихся начертить рисунок и написать краткое решение задач № 1104 (д), № 1105 (в).

Задача № 1104 (д)

Решение (рис. 239):

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{AOB} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}.$$

$$R = 4 \text{ (см)}$$

$$C = 2\pi R = 8\pi \text{ (см)}$$

Ответ: $C = 8\pi$ см.

Вопросы для учащихся:

- Почему $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{AOB}$?
- Какая формула используется в решении задачи для вычисления площади треугольника?
- Как еще можно вычислить площадь треугольника ABO ?

Задача № 1105 (в)

Решение (рис. 240):

Стороны $\triangle ABC$ являются касательными к окружности, поэтому если радиус окружности равен r , то $CM = r$, $CN = r$.

В прямоугольном $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, $AB = c$, тогда $CB = c \cdot \sin \alpha$, $AC = c \cdot \cos \alpha$, поэтому $AM = c \cdot \cos \alpha - r$, $BN = c \cdot \sin \alpha - r$.

$$\text{Тогда } AK = c \cdot \cos \alpha - r, BK = c \cdot \sin \alpha - r,$$

$$AK + KB = c \cdot \cos \alpha - r + c \cdot \sin \alpha - r \Rightarrow c \cdot \cos \alpha + c \cdot \sin \alpha - 2r = c.$$

$$\text{Таким образом, } c(\cos \alpha + \sin \alpha - 1) = 2r.$$

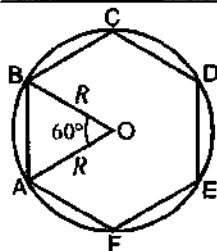


Рис. 239

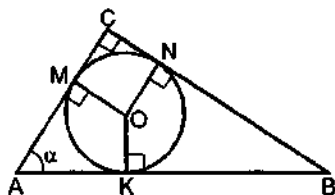


Рис. 240

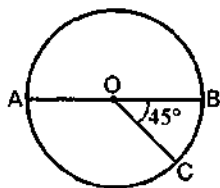


Рис. 241

$$r = \frac{c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2}.$$

$$C = 2\pi r = \frac{2\pi c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2} = \pi(\cos \alpha + \sin \alpha - 1).$$

Ответ: $C = \pi(\cos \alpha + \sin \alpha - 1)$

Вопросы для учащихся:

- Объясните, почему $CM = r$, $CN = r$.
- Почему $CB = c \cdot \sin \alpha$, $AC = c \cdot \cos \alpha$?
- Объясните, почему верно равенство $c \cdot \cos \alpha + c \cdot \sin \alpha - 2r = c$.
- Почему стороны треугольника ABC являются касательными к данной окружности?

III. Решение задач на готовых чертежах

Задачи решаются самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением решений тех из них, с которыми не справилось большинство учащихся.

1. Рис. 241. $AB = 10$.

Найти: C , длины дуг CB и AC .

2. Рис. 242. $\triangle ABC$ – правильный.

Найти: длину окружности, длину дуги BC .

3. Рис. 243. $ABCD$ – правильный четырехугольник, длина дуги AD равна 4π . Найти: S_{ABCD} .

4. Рис. 244. $ABCD$ – правильный четырехугольник, $P_{ABCD} = 16$.

Найти: длину окружности.

5. Рис. 245. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник,

$S_{ABCDEF} = 36\sqrt{3}$. Найти: длину дуги AFE .

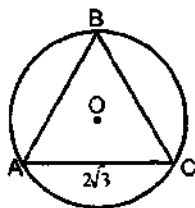


Рис. 242

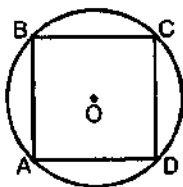


Рис. 243

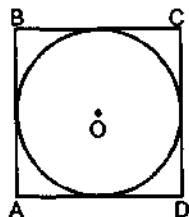


Рис. 244

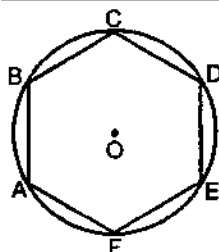


Рис. 245

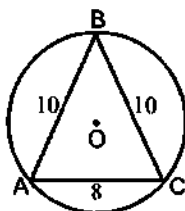


Рис. 246

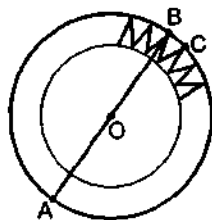


Рис. 247

6. Рис. 246. $AB = BC = 10$, $AC = 8$.

Найти: длину окружности.

Ответы к задачам:

1. 10π ; $\frac{5\pi}{4}$.

2. 4π ; $\frac{4\pi}{3}$.

3. 128.

4. 4π .

5. $\frac{4\sqrt{6}\pi}{3}$.

6. $\frac{50\pi}{3}$.

IV. Решение задач

Разобрать задачи № 76 (из рабочей тетради), № 1110.

Задача № 1110

Решение (рис. 247):

$$AB = 450 \text{ мм}, \widehat{BC} = 47,1^\circ.$$

$$C = 2\pi R = 3,14 \cdot 450 = 1413 \text{ (мм)}$$

$$1413 : 47,1 = 30 \text{ (зубьев)}$$

Ответ: 30 зубьев.

Решить самостоятельно задачи:

I уровень – № 75 из рабочей тетради;

II уровень – № 1108, № 1112.

V. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Найдите длину окружности с радиусом 5 см. Чему равна длина ее дуги с градусной мерой 36° ?
2. Длина окружности, описанной около квадрата, равна 12π см. Найдите длину окружности, вписанной в этот квадрат.

II вариант

1. Найдите длину окружности с радиусом 9 см. Чему равна длина ее дуги с градусной мерой 20° ?
2. Длина окружности, вписанной в правильный треугольник, равна $2\sqrt{3}\pi$ см. Найдите длину окружности, описанной около этого треугольника.

II уровень

I вариант

1. В окружности длиной 75π проведена хорда, стягивающая дугу в 120° . Вычислите длину данной дуги и хорды.
2. Окружность с радиусом 12 см разогнута в дугу, центральный угол которой равен 135° . Найдите радиус этой дуги и длину хорды, стягиваемой этой дугой.

II вариант

1. В окружности длиной 54π проведена хорда, стягивающая дугу в 150° . Вычислите длину дуги и хорды, стягивающей ее.
2. Дуга, радиус окружности которой равен 6 см и центральный угол 120° , свернута в окружность. Найдите радиус окружности. Чему равна хорда, стягиваемая этой дугой?

III уровень

I вариант

1. Вычислите радиус окружности, длина которой равна сумме длины окружности с радиусом 6 см и длине дуги окружности с радиусом 9 см и центральным углом 100° .
2. Рис. 248. Вычислите длину дуги APD , если длина дуги AMB равна 12π , а радиусы дуг AMB , BNC и CKD относятся как $3 : 2 : 1$. (AB , BC , CD , AD – диаметры полуокружностей.)

II вариант

1. Вычислите радиус дуги с центральным углом 160° , если ее длина равна разности длин окружностей с радиусами 27 см и 15 см.
2. Рис. 249. Длина дуги ABC равна 24π . Вычислите длину дуги ADE , если радиусы дуг ADE , EKM , MNC относятся как $5 : 4 : 3$. (AC , AE , EM , MC – диаметры полуокружностей.)

Ответы к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант: 1) 10π , π ; 2) $6\sqrt{2}\pi$. II вариант: 1) 18π , π ; 2) $4\sqrt{3}\pi$.

II уровень

I вариант: 1) 24π , $36\sqrt{3}$; 2) $R = 32$; $32\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

II вариант: 1) $22,5\pi$, $27\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; 2) $R = 2$; $6\sqrt{3}$.

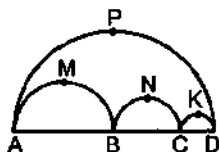


Рис. 248

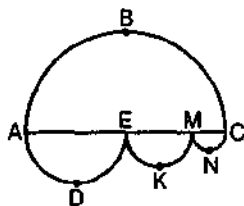


Рис. 249

III уровень*I вариант: 1) 8,5; 2) 24π.**II вариант: 1) 27; 2) 10π.***VI. Подведение итогов урока****Домашнее задание**

Решить задачи:

I уровень – № 77 (из рабочей тетради), № 1106, № 1107, № 1109.*II уровень* – № 1106, № 1107, № 1111, № 1113.**Урок 45****Площадь круга и кругового сектора****Цель урока:**

- Дать представление о выводе формулы площади круга и на ее основе получить формулу площади кругового сектора.
- Научить учащихся решать задачи на применение формул площади круга и кругового сектора.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся****1. Проверка домашнего задания.**

Попросить двух учащихся оформить на доске краткое решение задач № 1106, № 1111.

Пока они готовятся у доски, остальным учащимся предлагается работа по индивидуальным карточкам (3–6 учащихся) и решение задач по готовым чертежам.

Индивидуальные задания по карточкам**Уровень I (карточка № 1)**

1. Найдите длины дуг, на которые разбивают окружность два радиуса. Угол между радиусами равен 120° , радиус окружности равен 6 дм.
2. Найдите длину окружности, в которую вписан квадрат со стороной 5 см.

Уровень II (карточка № 2)

1. В окружность вписан правильный треугольник с площадью $12\sqrt{3}$ см². Найдите длину окружности.
2. Около некоторой окружности описан правильный шестиугольник со стороной $4\sqrt{3}$ дм. Вычислите длину дуги данной окружности с градусной мерой 150° .

Уровень III (карточка № 3)

1. В окружности длиной 40π проведена хорда, отстоящая от центра на 10. Найдите длину меньшей из дуг, стягиваемых этой хордой.

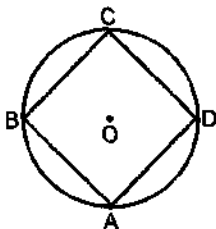


Рис 250

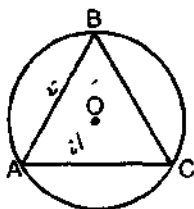


Рис 251

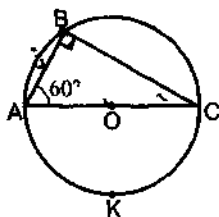


Рис 252

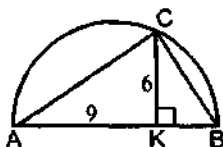


Рис 253

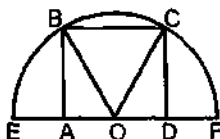


Рис 254

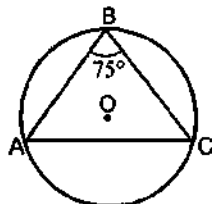


Рис 255

2. Даны две окружности. Вторая окружность имеет центр на первой окружности и касается ее диаметра AB в точке C . Найдите длины окружностей, если известно, что $AC = a$, $BC = b$.

Задачи на готовых чертежах

- Рис. 250. $ABCD$ – квадрат. $S_{ABCD} = 16$
Найти: длину окружности.
- Рис. 251. $\triangle ABC$ – правильный. Длина дуги $AB = 4\pi$.
Найти: $S_{\triangle ABC}$.
- Рис. 252. $AB = 2$. Найти: длины дуг AB , BC , AKC .
- Рис. 253. AB – диаметр.
Найти: длину полуокружности ACB .
- Рис. 254. $l_{\cup EB} = l_{\cup BC} = l_{\cup CF} = 4\pi$.
 EF – диаметр окружности с центром O .
Найти: BC .
- Рис. 255. $AC = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
Найти: длину дуги AC .

Ответы к задачам на готовых чертежах:

- | | |
|---|------------------------|
| 1. $4\sqrt{2}R$; | 2. $27\sqrt{3}$; |
| 3. $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π ; | 4. $6,5\pi$; |
| 5. $72\sqrt{3}$; | 6. $\frac{10\pi}{3}$. |

Работы по индивидуальным карточкам можно проверить, собрав тетради. Правильность решения задач на готовых чертежах учащиеся проверяют самостоятельно по готовым ответам. Задачи, с которыми не справились большинство учащихся, нужно обсудить.

Далее заслушать учащихся, готовивших на доске решения до машинных задач № 1106, № 1111.

Задача № 1106

$$C = 2\pi r; 500 \cdot 2\pi = 989 \Rightarrow D = 2R = \frac{989}{500\pi} \approx 0,63 \text{ (м)}$$

Ответ: 0,63 м

Вопросы для обсуждения:

- Что означает один оборот колеса с математической точки зрения?
- Чему равно расстояние, пройденное автомобилем, если колесо автомобиля сделало один оборот?

Задача № 1111

$$D = 58 \text{ см} \Rightarrow R = \frac{D}{2} = 29 \text{ (см)}$$

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 29 \cdot 117^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 29 \cdot 13}{20} = \frac{377\pi}{20} \approx 59,189 \text{ (см)}$$

Ответ: 59,189 см

Вопросы для обсуждения:

- Что нужно знать для вычисления длины дуги?
- Каким образом можно вычислить радиус камня?

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие круга.

Определение. Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Если круг с центром O имеет радиус, равный R , то он содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся на расстоянии, не превосходящем R .

2. Вывод формулы площади круга.

(Учитель излагает в виде лекции. Используется рис. 314 учебника.)

План лекции:

- а) $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – правильный n -угольник с площадью S_n .
- б) $\omega(O, R)$ – окружность с площадью S , описанная около $A_1A_2A_3 \dots A_n$.
- в) $\omega(O, r)$ – окружность с площадью S_2 , вписанная в $A_1A_2A_3 \dots A_n$.
- г) Сравнение S, S_2, S_n : $S_2 < S_n < S$.

$$\begin{aligned} \text{д) } n \rightarrow \infty \Rightarrow r &= R \cos \frac{180^\circ}{n} \rightarrow R \cos 0^\circ = R \\ &\Rightarrow S_2 \rightarrow S \Rightarrow S_n \rightarrow S \end{aligned}$$

$$\text{е) } S_n = \frac{1}{2} P_n r$$

ж) Т. к. $r \rightarrow R$, то $P_n \rightarrow 2\pi R$.

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} P_n r \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2 = S.$$

Итак, формула для вычисления площади круга радиуса R :

$$S = \pi R^2.$$

3. Ввести понятие кругового сектора.

Определение. Круговым сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

См. рис. 256.

$\cup ACB$ – дуга кругового сектора 1.

$\cup ADB$ – дуга кругового сектора 2.



Рис. 256

4. Вывод формулы для вычисления площади кругового сектора.

Задача для самостоятельного решения: круговой сектор радиуса R ограничен дугой с градусной мерой α . Найдите его площадь.

(Дать учащимся 3–5 минут для обдумывания. Различные способы решения заслушать и обсудить.)

Решение:

Площадь круга $S = \pi R^2$.

Площадь кругового сектора, ограниченного дугой в 1° , равна

$$S^1 = \frac{S}{360} = \frac{\pi R^2}{360}.$$

Площадь кругового сектора, ограниченного дугой в α° , равна:

$$S^1 \cdot \alpha = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

Итак, формула для вычисления площади кругового сектора радиуса R , ограниченного дугой с градусной мерой α :

$$S_{\text{кр сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

IV. Закрепление изученного материала

1. Разобрать задачу № 78 из рабочей тетради, обсудить решение задачи.

2. Разобрать задачу № 1117 (г)

Один из учащихся решает у доски, остальные в тетрадях. Учитель контролирует правильность решения, задает при необходимости наводящие вопросы.

Задача № 1117 (г)

Дано: $ABCD$ – трапеция; $AB = CD$, $\angle A = \alpha$, $AD = a$; $\omega(O, r)$ – окружность, вписанная в трапецию.

Найти: S круга.

Решение (рис. 257): Т. к. AB и AD – касательные, проведенные из

точки A , то AO – биссектриса $\angle BAD$, т. е. $\angle OAP = \frac{\alpha}{2}$.

DO также является биссектрисой угла CDA , т. е. $\angle ODP = \frac{\alpha}{2}$.

Прямоугольные треугольники AOP и DOP ($OP \perp AD$) равны по катету и острому углу, поэтому $AP = DP = \frac{a}{2}$, тогда

$$\frac{OP}{AP} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow OP = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Но OP – радиус вписанной окружности, значит:

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Наводящие вопросы:

- Что можно сказать о сторонах трапеции по отношению к вписанной в нее окружности? (Они являются касательными к окружности.)
- Чему равна градусная мера угла OAP ? ($\frac{\alpha}{2}$.)
- В каком отношении делит точка P основание AD ? (Пололам.)
- Докажите, что $AP = DP$.
- Рассмотрите $\triangle AOP$. Что вы можете о нем сказать? (Он прямоугольный, в нем $\angle OAP = \frac{\alpha}{2}$, $AP = \frac{a}{2}$, OP – радиус вписанной в трапецию окружности.)
- Какая тригонометрическая функция выражает зависимость двух катетов прямоугольного треугольника и одного из острых углов? (Тангенс; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}}$.)
- Найдите радиус r и площадь S вписанного круга. ($r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$;

$$S = \frac{\pi a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.)$$

3. Самостоятельное решение задач.

I уровень – задача № 81 из рабочей тетради, задачи № 1116 (в), № 1117 (а).

II уровень – задача № 81 из рабочей тетради, задачи № 1116 (в), дополнительная задача № 1.

Дополнительные задачи

Задача 1

Постройте круг, площадь которого в 4 раза больше площади данного круга. Во сколько раз длина окружности, ограничиваю-

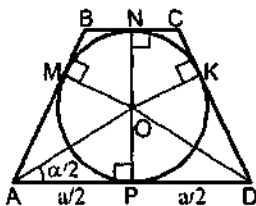


Рис. 257

шая первый круг, меньше длины окружности, ограничивающей второй круг?

Решение:

Пусть радиус первого круга R_1 , тогда его площадь $S_1 = \pi R_1^2$.

Если радиус второго круга R_2 , то площадь $S_2 = \pi R_2^2$.

Площадь второго круга в 4 раза больше площади первого круга, т. е. $S_2 = 4S_1$, тогда $\pi R_2^2 = 4\pi R_1^2$, откуда $R_2 = 2R_1$, т. е. радиус второго круга в два раза больше радиуса первого круга. Осталось построить круг с радиусом в два раза большим, чем радиус данного круга.

Задача 2

Постройте круг, площадь которого равна разности площадей двух данных кругов.

Решение:

Пусть имеются два круга, площади которых S_1 и S_2 , радиусы – R_1 и R_2 соответственно, тогда $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$. Нужно построить круг некоторого радиуса R с площадью $S = S_1 - S_2$ ($S_1 > S_2 \Rightarrow R_1 > R_2$).

Т. к. $S = \pi R^2$, то $\pi R^2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 \Rightarrow R^2 = R_1^2 - R_2^2 \Rightarrow R_1^2 = R^2 + R_2^2$.

Построим прямоугольный треугольник с катетом R_2 и гипотенузой R_1 . Тогда второй его катет R – это и есть радиус круга, который нам необходимо построить.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пп. 111, 112; вопросы 11, 12.

Решить задачи:

I уровень: № 1114, 1116 (а, б), 1117 (б, в);

II уровень: № 1116 (а, б), 1117 (б, в), дополнительную задачу № 2.

Урок 46

Площадь круга и кругового сектора. Решение задач

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на применение формул для вычисления площади круга и кругового сектора.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

Два ученика вызываются к доске и получают задания:

- а) вывести формулу для вычисления площади круга;
- б) вывести формулу для вычисления площади кругового сектора.

Фронтальная работа с классом.

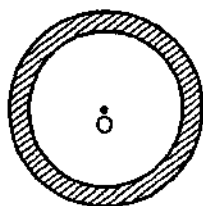


Рис 258

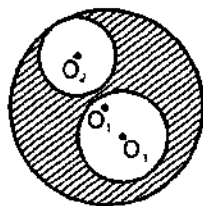


Рис 259

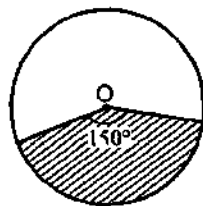


Рис 260

- Какая формула используется для вычисления:
 - а) длины окружности;
 - б) длины дуги окружности;
 - в) площади круга;
 - г) площади кругового сектора;
 - д) стороны правильного n -угольника;
 - е) радиуса вписанной в правильный n -угольник окружности;
 - ж) площади правильного n -угольника?
- Чему равен угол правильного n -угольника?
- Чему равна сумма внешних углов правильного n -угольника?

После обсуждения вопросов заслушать ответ учеников, работавших у доски.

III. Решение задач на готовых чертежах

Задачи решаются самостоятельно с последующей самопроверкой по готовым ответам и обсуждением решений тех из них, с которыми не справилось большинство учащихся.

Задание: найти площади заштрихованных фигур.

1. Рис. 258. Дано: $R_1 = 10$, $R_2 = 8$.
2. Рис. 259. Дано: $R_1 = 15$, $R_2 = 6$, $R_3 = 7$.
3. Рис. 260. Дано: $R = 5$.
4. Рис. 261. Дано: $R = 4$.
5. Рис. 262. Дано: $R_1 = 6$.
6. Рис. 263. Дано: $R_2 = 3$.

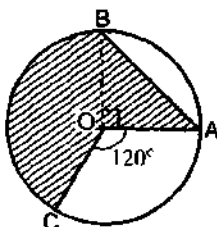


Рис 261

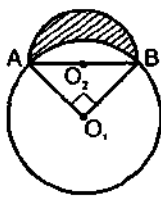


Рис 262

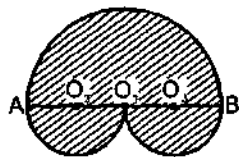


Рис 263

Ответы к задачам на готовых чертежах:

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1. 36π ; | 2. 140π ; |
| 3. $\frac{125\pi}{12}$; | 4. $\frac{20\pi}{3} + 8$; |
| 5. 18; | 6. 27π . |

IV. Решение задач

1. Разобрать задачу № 81 из рабочей тетради.
2. Разобрать задачу № 1122 из учебника.

Задача № 1122

Решение:

$S_{\text{дорожки}} = S_1 - S_{\text{клумбы}}$, где S_1 – площадь дорожки и клумбы вместе. Клумба – это круг с радиусом 3 м. Клумба и дорожка – это круг с радиусом $3 + 1 = 4$ (м).

Тогда $S_1 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ (м²), $S_{\text{клумбы}} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ (м²),

$S_{\text{дорожки}} = 16\pi - 9\pi = 7\pi$ (м²).

На 1 м² дорожки требуется 0,8 дм³ песка, тогда на всю дорожку потребуется $7\pi \cdot 0,8 = 5,6\pi$ (дм³) $\approx 17,6$ (дм³) песка.

Ответ: 17,6 дм³ песка

3. Решить самостоятельно задачи.

I уровень: № 84 из рабочей тетради, № 1118, № 1120;

II уровень: дополнительные задачи 1–4.

Дополнительные задачи

Задача 1

В треугольник со сторонами 5, 5 и 8 см вписана окружность (рис. 264). Вычислите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке, где ABC – данный треугольник, $\omega(O, r)$ – указанная окружность.

(Ответ: $12 - \frac{16}{9}\pi$.)

Задача 2

Найдите радиус кругового сектора, ограниченного дугой в 120° , площадь которого равна площади круга с радиусом 6.

(Ответ: $6\sqrt{3}$.)

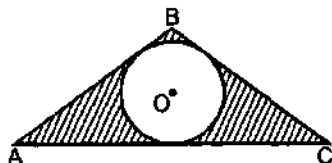


Рис 264

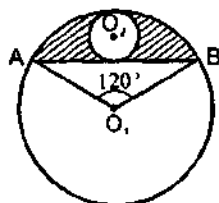


Рис 265

Задача 3

Окружность с центром O_2 касается хорды AB и окружности с центром O_1 (рис. 265). Найдите площадь фигуры, заштрихованной на рисунке, если большая окружность имеет радиус, равный 8 см, $\angle AO_1B = 120^\circ$.

(Ответ: $\frac{52\pi - 48\sqrt{3}}{3}$.)

Задача 4

Две окружности, имеющие общий центр, называются *концентрическими*.

Задание: данный круг разделить окружностью, концентрической его окружности, на две равные по площади части

(Указание: $R_{\text{мал}} = R_{\text{бол}} \cdot \sqrt{2}$.)

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Решить задачи № 83 (из рабочей тетради), № 1121, 1123, 1124.

Урок 47**Обобщение по теме «Длина окружности. Площадь круга»****Цель урока:**

- Систематизировать знания, умения и навыки по данной теме.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение формул для вычисления длины окружности и дуги окружности, площади круга и кругового сектора.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся**

Фронтальная работа с классом – устный тест.

1. Установите, истинны или ложны следующие высказывания:

- ✚ а) Длину окружности можно вычислить по формуле $C = \pi D$, где D – радиус окружности.
- ✚ б) Площадь круга равна произведению квадрата его радиуса на π .
- ✚ в) Длина полуокружности диаметра 10 равна 5π .
- г) Площадь круга можно вычислить по формуле $S = \frac{\pi D^2}{2}$, где D – диаметр круга.
- д) Площадь круга радиуса 10 равна 10π .
- е) Длина дуги окружности с градусной мерой в 60° вычисляется по формуле $l = \frac{2\pi R}{3}$.

- † ж) Площадь кругового сектора, ограниченного дугой в 90° , вычисляется по формуле $S = \frac{\pi R^2}{4}$.
- ~ з) Если длина дуги окружности радиуса R равна $\frac{\pi R}{4}$, то градусная мера этой дуги равна 90° .

2. Закончите утверждение:

- а) Если диаметр окружности равен 6 см, то ее длина равна ... 6π
- б) Если диаметр круга увеличить в 4 раза, то его площадь увеличится в 16 раз.
- в) Если радиус окружности уменьшить на 3, то ее длина уменьшится на 6π .
- г) Если радиус круга равен 6 см, то площадь его кругового сектора вычисляется по формуле $\dots \frac{\pi R^2}{10}$
- д) Площадь вписанного в окружность квадрата равна 16 см^2 . Площадь круга, ограниченного данной окружностью, равна 8π .
- е) Площадь описанного около окружности правильного четырехугольника равна 25. Длина этой окружности равна 5π .
- ж) Диаметр окружности равен 8 см. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равен 24 .
- з) Сторона правильного четырехугольника, вписанного в окружность, равна 10. Длина окружности равна $10\sqrt{2}\pi$.

Ответы к заданиям теста

1. Истинные высказывания: б, в, ж.
Ложные высказывания: а, г, д, е, з.
2. а) 6π , б) 16 ;
в) 6π , г) $\frac{\pi R^2}{10}$;
д) 8π , е) 5π ;
ж) 24 ; з) $10\sqrt{2}\pi$.

III. Проверка домашнего задания

На доске подготовить решение задач № 1121, 1124 с ошибками.
Задание учащимся – найти ошибки в решении.

Задача № 1121

Дано: круг (O ; R_2), $S_2 = 314 \text{ мм}^2$; круг (O ; R_1), $D_1 = 18,5 \text{ мм}$.

Найти: $R_2 - R_1$

Решение:

$$S_2 = \pi R_2^2 = 314 \Rightarrow R_2^2 = \frac{314}{\pi} \approx 100 \Rightarrow R_2 = 10 \text{ мм}.$$

$$D_1 = 18,5 \text{ мм}; D_2 = 2R_2 = 20 \text{ мм},$$

$$R_2 - R_1 = D_2 - D_1 = 20 - 18,5 = 1,5 \text{ (мм)}.$$

Ответ: 1,5 мм.



Рис 266



Рис 267

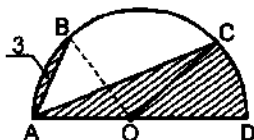


Рис 268

Задача № 1124*Решение (рис. 266):*

$$R_1 = 1 \Rightarrow S_1 = \pi R_1^2 = \pi.$$

$$R_2 = 2 \Rightarrow S_2 = \pi R_2^2 = 4\pi \Rightarrow S_{\text{кольца1}} = S_2 - S_1 = 4\pi - \pi = 3\pi.$$

$$R_3 = 3 \Rightarrow S_3 = \pi R_3^2 = 9\pi \Rightarrow S_{\text{кольца2}} = S_3 - S_1 = 9\pi - \pi = 8\pi.$$

$$R_4 = 4 \Rightarrow S_4 = \pi R_4^2 = 16\pi \Rightarrow S_{\text{кольца3}} = S_4 - S_1 = 16\pi - \pi = 15\pi.$$

*Ответ: $\pi, 3\pi, 8\pi, 15\pi$.***IV. Решение задач**

1. Разобрать задачу № 85 из рабочей тетради.

2. Разобрать решение задачи:

На рис. 267 изображен полуокруг с диаметром AD . $\angle AB = \angle CD$, $\angle B = 90^\circ$. Площадь заштрихованной фигуры равна 16π . Найдите длину дуги BC .

Наводящие вопросы:

– Нельзя ли заштрихованную фигуру разбить на такие фигуры, площади которых мы умеем вычислять? (Проведем радиусы OB и OC : получим круговой сектор OCD , треугольник AOC и фигуру, ограниченную дугой AB и хордой AB . Рис. 268.)

– Как найти площадь кругового сектора OCD ? (Т. к. $\angle CD = 45^\circ$, то $S_{OCD} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 45^\circ = \frac{\pi R^2}{8}$.)

– Как найти площадь $\triangle AOC$? ($\angle AOC = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin \angle AOC = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} R^2$.)

– Как найти площадь фигуры, ограниченной дугой AB и хордой AB ?

Ответ:

$$S_{\text{фигуры3}} = S_{\text{кр сектора } AOB} - S_{\triangle AOB}.$$

$$S_{\text{кр сектора } AOB} = S_{\text{кр сектора } OCD} = \frac{\pi R^2}{8};$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} R^2. \quad S_{\text{фигуры3}} = \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} R^2.$$

- Чему равна площадь заштрихованной фигуры?

Ответ:

$$S = S_{OCD} + S_{AOC} + S_{\text{фигуры}} = \frac{\pi R^2}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} R^2 + \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} R^2 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

- Что нужно знать для вычисления длины дуги BC ? (Радиус окружности.)
- Можно ли найти радиус окружности? (По условию задачи площадь заштрихованной фигуры равна 16π , а мы получили $\frac{\pi R^2}{4}$, т. е. $\frac{\pi R^2}{4} = 16\pi$, откуда $R^2 = 64$, значит, $R = 8$.)
- Чему равна длина дуги BC ? ($l_{BC} = \frac{\pi R}{180} \cdot 45 = \frac{\pi \cdot 8}{4} = 2\pi$.)

V. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Длина окружности равна 8π . Вычислите площадь круга, ограниченного данной окружностью.
2. Градусная мера дуги окружности с радиусом 6 см равна 30° . Вычислите площадь кругового сектора, соответствующего этой дуге.

II вариант

1. Длина окружности равна 10π . Вычислите площадь круга, ограниченного данной окружностью.
2. Градусная мера дуги окружности с радиусом 4 см равна 45° . Вычислите площадь кругового сектора, соответствующего этой дуге.

II уровень

I вариант

1. Площадь круга равна 324π . Вычислите длину окружности, радиус которой в три раза меньше радиуса круга.
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной дугой AB и хордой AB , если градусная мера дуги равна 30° , а радиус окружности равен 6 см.

II вариант

1. Площадь круга равна 256π . Вычислите длину окружности, радиус которой в два раза больше радиуса круга.
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной дугой CD и хордой CD , если градусная мера дуги равна 150° , а радиус окружности равен 12 см.

III уровень

I вариант

1. Как изменится площадь круга, если длина соответствующей ему окружности уменьшится в 5 раз?

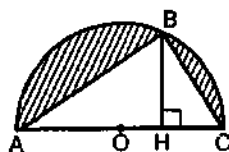


Рис 269

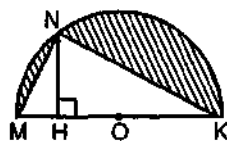


Рис 270

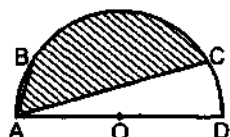


Рис 271

2. Рис. 269.

Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если AC – диаметр окружности с центром O , $BH = 6$, $HC = 4$.

II вариант

1. Как изменится длина окружности, если площадь соответствующего ей круга увеличится в 36 раз?

2. Рис. 270.

Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если MK – диаметр окружности с центром O , $MH = 4$, $NH = 8$.

Ответы к задачам самостоятельной работы**I уровень**

I вариант: 1) 16π ; 2) $3\pi \text{ см}^2$.

II вариант: 1) 25π ; 2) $2\pi \text{ см}^2$.

II уровень

I вариант: 1) 12π ; 2) $3\pi - 9 \text{ см}^2$.

II вариант: 1) 64π ; 2) $60\pi - 36 \text{ см}^2$.

III уровень

I вариант: 1) уменьшится в 25 раз; 2) $20,125\pi - 39$.

II вариант: 1) увеличится в 6 раз; 2) $50\pi - 80$.

VI. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Решить задачи № 1125, № 1127, № 1128.

Дополнительная задача

Рис. 271. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если известно, что площадь полукруга с диаметром AD равна 8π , $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle AOB = \angle COD$. (Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.)

Урок 48

Решение задач по теме «Длина окружности и площадь круга»

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по темам «Правильные многоугольники» и «Длина окружности и площадь круга».
- Совершенствовать навыки решения задач по изучаемой теме.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверочный тест

Учащиеся работают в тетрадях, ответы выписывают на листочках, которые по окончании работы сдают учителю на проверку. Самопроверка осуществляется по записям в тетрадях по готовым ответам, предоставленным учителем после того, как собраны листочки на проверку. Тут же проводится анализ ошибок: выявляется, с какими заданиями учащиеся справились недостаточно хорошо, а затем идет обсуждение этих заданий до получения верного ответа.

- В каждом задании установите верный ответ из числа предложенных.

I вариант

1. Четырехугольник является правильным, если:
 - а) все его углы равны между собой;
 - б) все его стороны равны между собой;
 - в) все его углы равны между собой и все его стороны равны между собой.
2. Длина окружности больше диаметра в ...
 - а) 2π раз;
 - б) π раз;
 - в) 2 раза.
3. Длина дуги окружности вычисляется по формуле:
 - а) $l = \frac{\pi R \alpha}{180}$;
 - б) $l = \frac{\pi R \alpha}{360}$;
 - в) $l = \frac{\pi R^2 \alpha}{180}$.
4. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность с радиусом R , равна:
 - а) $R\sqrt{2}$;
 - б) $R\sqrt{3}$;
 - в) R .
5. Отношение радиуса вписанной к радиусу описанной около квадрата окружности равно:
 - а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 - б) 2;
 - в) $\sqrt{2}$.
6. Отношение радиуса описанной к радиусу вписанной в правильный шестиугольник окружности равно:
 - а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
 - б) $\sqrt{3}$;
 - в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. Каждый угол правильного десятиугольника равен:
 - а) 140° ;
 - б) 135° ;
 - в) 144° .
8. Внешний угол правильного двенадцатиугольника равен:
 - а) 36° ;
 - б) 30° ;
 - в) 45° .
9. Из круга, радиус которого равен 20 см, вырезан сектор. Дуга сектора равна 90° . Чему равна площадь оставшейся части круга?
 - а) $100\pi \text{ см}^2$;
 - б) $400\pi \text{ см}^2$;
 - в) $300\pi \text{ см}^2$.

10. Длина дуги окружности с радиусом 12 см и градусной мерой 100° равна:

а) $\frac{20\pi}{3}$ см; б) $\frac{10\pi}{3}$ см; в) $\frac{\pi}{15}$ см.

II вариант

- Если в четырехугольнике все стороны равны, то он:
 - а) всегда является правильным;
 - б) может быть правильным;
 - в) никогда не является правильным.
- Длина окружности больше радиуса в
 - а) 2π раз;
 - б) π раз;
 - в) 2 раза.
- Площадь кругового сектора вычисляется по формуле:
 - а) $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{180}$;
 - б) $S = \frac{\pi R \alpha}{180}$;
 - в) $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$.
- Сторона правильного четырехугольника, вписанного в окружность с радиусом R , равна:
 - а) R ;
 - б) $R\sqrt{2}$;
 - в) $R\sqrt{3}$.
- Отношение радиуса описанной к радиусу вписанной в квадрат окружности равно:
 - а) 2;
 - б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 - в) $\sqrt{2}$.
- Отношение радиуса вписанной к радиусу описанной около правильного шестиугольника окружности равно:
 - а) $\sqrt{3}$;
 - б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - в) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
- Каждый угол правильного восьмиугольника равен:
 - а) 135° ;
 - б) 144° ;
 - в) 140° .
- Внешний угол правильного двадцатиугольника равен:
 - а) 20° ;
 - б) $22,5^\circ$;
 - в) 18° .
- Из круга, радиус которого равен 30 см, вырезан сектор. Дуга сектора равна 60° . Чему равна площадь оставшейся части круга?
 - а) $150\pi \text{ см}^2$;
 - б) $750\pi \text{ см}^2$;
 - в) $900\pi \text{ см}^2$.
- Длина дуги окружности с радиусом 6 см и градусной мерой 135° равна:
 - а) $\frac{9\pi}{2}$ см;
 - б) 9π см;
 - в) $\frac{9\pi}{4}$ см.

Ответы к тесту

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I вариант	в	б	а	б	а	а	в	б	в	а
II вариант	б	а	в	б	в	б	а	в	б	а

III. Решение задач

Всех учащихся разделить на три варианта в зависимости от их подготовленности.

I уровень – наиболее простые задачи. Учащиеся работают самостоятельно под контролем учителя.

II уровень – задачи средней степени сложности. Учащиеся работают самостоятельно, при этом им можно разрешить консультироваться у учителя по необходимости.

III уровень – задачи повышенной сложности. Учащиеся работают самостоятельно, в конце урока сдают тетради на проверку учителю.

I уровень

1. Вычислите внутренний и внешний углы правильного двадцатисемиугольника.
2. Сколько сторон имеет правильный n -угольник, если: а) его внутренний угол равен 170° ; б) его внешний угол равен 12° ?
3. Около квадрата со стороной $2\sqrt{2}$ см описана окружность, которая вписана в правильный треугольник. Найдите площадь треугольника.
4. Рис. 272. Внутри окружности с радиусом 8 см расположены две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, каждая из которых касается большей окружности внутренним образом, причем все точки касания и радиусы всех трех окружностей лежат на одной прямой. Найдите площадь заштрихованной фигуры.
5. Рис. 273. $ABCD$ – квадрат со стороной 5 см. Определите площади фигур, которые получились путем проведения данных дуг окружностей с центрами в точках B и D .

II уровень

1. Может ли внутренний угол правильного многоугольника быть равен $178,4^\circ$?
2. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и BD пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно. Найдите отношение $AM : MN$.
3. В квадрат, площадь которого равна 25^2 см, вписана окружность. Определите площадь правильного восьмиугольника, вписанного в эту окружность.

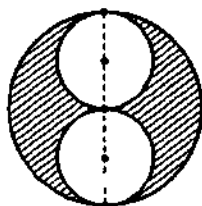


Рис. 272

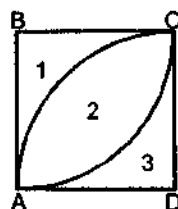


Рис. 273

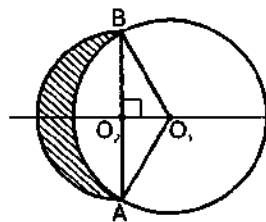


Рис. 274

4. На окружности радиуса R последовательно отмечены точки A, B, C, D , которые делят окружность на дуги AB, BC, CD, DA , отношение которых равно $1 : 3 : 5 : 9$. Определите длины этих дуг и площади ограниченных ими секторов.
5. Рис. 274. Определите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если O_1 – центр окружности с радиусом 4 см, $\angle AO_1B = 120^\circ$, O_2 – центр окружности с диаметром AB .

III уровень

1. Отрезок длины a является стороной правильного четырехугольника и правильного восьмиугольника. Найдите отношение их площадей.
2. Около одной окружности описаны правильный восьмиугольник и правильный двенадцатиугольник. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около этих многоугольников.
3. Внутри окружности радиуса R расположены три окружности радиуса r , касающиеся друг друга внешним образом, каждая из которых касается большей окружности внутренним образом. Определите разность площади большей окружности и суммы площадей меньших окружностей.
4. Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите площадь шестиугольника.
5. В некотором многоугольнике можно провести 20 диагоналей. Найдите число сторон этого многоугольника.

Ответы к задачам

I уровень

1. $\frac{500^\circ}{3}; \frac{40^\circ}{3};$
2. а) $n = 36$; б) $n = 30$;
3. $12\sqrt{3} \text{ см}^2;$
4. $32\pi \text{ см}^2;$
5. $S_1 = S_3 = \frac{100 - 25\pi}{4}; S_2 = \frac{50\pi - 100}{4}.$

II уровень

1. Да, при $n = 225$;
2. $\frac{\sqrt{5}+1}{2};$
3. $\frac{25\sqrt{2}}{2};$
4. $\frac{\pi R}{9}, \frac{\pi R}{3}, \frac{5\pi R}{9}, \pi R, \frac{\pi R^2}{18}, \frac{\pi R^2}{6}, \frac{5\pi R^2}{18}, \frac{\pi R^2}{2};$
5. $\frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{3}.$

III уровень

1. $4(\sqrt{2}-1)$;
2. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;
3. $\frac{\pi R^2 - 3\pi r^2}{3}$;
4. $\frac{75\sqrt{3}}{8}$;
5. 8.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи:

I уровень: №№ 1129 (а, в), 1130, 1131, 1135;

II уровень: №№ 1132 (б), 1133, 1134, 1136.

Урок 49

Подготовка к контрольной работе

Цели урока:

- Подготовить учащихся к контрольной работе.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Тест с последующей самопроверкой

1. Один из внутренних углов правильного n -угольника равен 150° . Найдите число сторон многоугольника.
 - а) 9;
 - б) 14;
 - в) 12;
 - г) 15.
2. Периметр правильного треугольника равен $12\sqrt{3}$ см. Найдите радиус вписанной окружности.
 - а) 2 см;
 - б) 4 см;
 - в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см;
 - г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ см.
3. Около квадрата описана окружность и в квадрат вписана окружность. Найдите отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности.
 - а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
 - б) $\sqrt{2}$;
 - в) 2;
 - г) $\frac{1}{2}$.
4. Сторона правильного шестиугольника равна 2 м. На сколько площадь описанного круга больше площади вписанного круга?
 - а) $3\sqrt{3}$;
 - б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$;
 - в) $6\sqrt{3}$;
 - г) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. Рис. 275. Площадь полуокружности с центром в точке O равна 8π . Найдите площадь заштрихованной фигуры.

- а) 16π ; б) 8π ;
в) 4π ; г) 32π .

6. В окружность вписаны квадрат и правильный треугольник. Периметр треугольника равен 30 см, периметр квадрата равен:

- а) $\frac{40\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$;
в) $\frac{40}{3}$; г) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$.

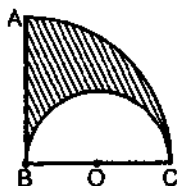


Рис. 275

Ответы к тесту:

1. в); 2. а); 3. б); 4. г); 5. б); 6. а).

III. Решение задач

Коллективно разобрать решения задач.

Задача 1

Площадь правильного треугольника больше площади вписанного в него круга на $27\sqrt{3} - 9\pi$. Найдите радиус круга.

Решение:

Пусть радиус вписанного круга равен r . Тогда площадь $S = \pi r^2$.

Сторона правильного треугольника, описанного около круга,

$$a_3 = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{3} = 2\sqrt{3}r.$$

$$\text{Тогда } S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a_3 \cdot a_3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}r^2.$$

$$S_{\Delta} - S_{\text{кр}} = 3\sqrt{3}r^2 - \pi r^2 = r^2(3\sqrt{3} - \pi).$$

По условию задачи $S_{\Delta} - S_{\text{кр}} = 27\sqrt{3} - 9\pi = 9(3\sqrt{3} - \pi)$, тогда $r^2(3\sqrt{3} - \pi) = 9(3\sqrt{3} - \pi)$, $r = 3$.

Ответ: 3.

Наводящие вопросы для учащихся:

- Чему равна сторона правильного треугольника, описанного около круга радиуса r ?
- Выразите площадь треугольника через r .
- Чему равна площадь круга радиуса r ?
- Чему равна разность площадей треугольника и вписанного в него круга?
- Найдите радиус r .

Задача 2

В сектор с центральным углом в 60° и радиусом, равным 6 см, вписана окружность. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рис. 276.

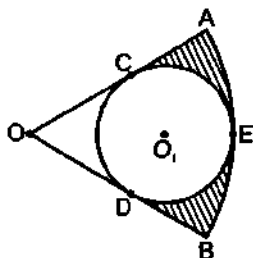


Рис 276

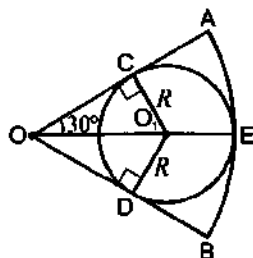


Рис 277

Решение (рис. 277):

Т. к. окружность вписана в сектор, то OA и OB – касательные к окружности, тогда OO_1 – биссектриса $\angle COD$, $OC \perp OA$. В $\triangle OCO_1$ $\angle COO_1 = 30^\circ$, $CO_1 = R \Rightarrow OO_1 = 2R$.

$OE = OO_1 + O_1E = 2R + R = 3R = 6$, тогда $3R = 2$ см, $OO_1 = 4$ см.

$$S_{OCO_1} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot O_1C$$

$$\text{По теореме Пифагора } OC^2 = OO_1^2 - CO_1^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow OC = 2\sqrt{3} \text{ см} \Rightarrow S_{OCO_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{OCO,D} = 2 \cdot S_{OCO_1} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найдем площадь кругового сектора, ограниченного дугой

$$CDE: S_{\text{сект}CDE} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 240^\circ = \frac{4\pi}{3} \cdot 2 = \frac{8\pi}{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найдем площадь кругового сектора, ограниченного дугой AEB :

$$S_{\text{сект}AEB} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{36\pi}{6} = 6\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сект}AEB} - S_{OCO,D} - S_{\text{сект}CDE} = 6\pi - 4\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} - 4\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{10\pi}{3} - 4\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Наводящие вопросы для учащихся:

- Чем являются радиусы OA и OB кругового сектора с дугой AEB ?
- Постройте $\triangle OCO_1$. Какие элементы в данном треугольнике известны?
- Как найти площадь незаштрихованной фигуры?
- Как найти площадь кругового сектора с дугой AEB ?

IV. Самостоятельное решение задач

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и стягивающей ее хордой, если длина хорды равна 6 м, а градусная мера дуги равна 120° .

2. Две окружности, имеющие радиусы 4 и 12 см, внешне касаются, AB – их общая касательная. Найдите площадь фигуры, заключенной между этими окружностями и их общей касательной AB (A и B – точки касания).
3. Данный круг разделить двумя окружностями, концентрическими окружностями круга, на три части, имеющие равные площади.
4. Большая диагональ ромба равна 24 см, а один из углов – 60° . Найдите длину вписанной окружности.
5. Найдите площадь круга, описанного около трапеции, стороны которой равны a см, a см, a см, $2a$ см.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи:

I уровень – №№ 1137–1139;

II уровень – №№ 1140–1143.

Урок 50

Контрольная работа по теме «Длина окружности и площадь круга»

I уровень

I вариант

1. Найдите площадь круга и длину ограничивающей его окружности, если сторона правильного треугольника, вписанного в него, равна $5\sqrt{3}$ см.
2. Вычислите длину дуги окружности с радиусом 4 см, если ее градусная мера равна 120° . Чему равна площадь соответствующего данной дуге кругового сектора?
3. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен $6\sqrt{3}$ дм. Найдите периметр правильного шестиугольника, описанного около той же окружности.
- 4*. Рис. 278. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $BC = 4$, $\angle BAC = 30^\circ$, O – центр окружности.

II вариант

1. Найдите площадь круга и длину ограничивающей его окружности, если сторона квадрата, описанного около него, равна 6 см.
2. Вычислите длину дуги окружности с радиусом 10 см, если ее градусная мера равна 150° . Чему равна площадь соответствующего данной дуге кругового сектора?
3. Периметр квадрата, описанного около окружности, равен 16 дм. Найдите периметр правильного пятиугольника, вписанного в эту же окружность.

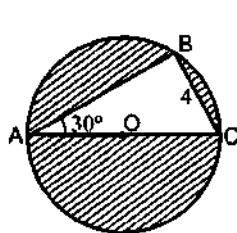


Рис 278

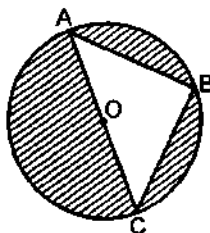


Рис 279

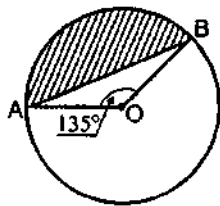


Рис 280

- 4*. Рис. 279. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если O – центр окружности с диаметром $10\sqrt{2}$.

II уровень

I вариант

- Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Найдите площадь меньшего круга и длину окружности, ограничивающей его, если радиус большей окружности равен $4\sqrt{3}$ см.
- Длина дуги окружности с градусной мерой 120° равна 8π см. Вычислите площадь соответствующего данной дуге кругового сектора.
- Рис. 280. Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $AO = 4$ см, $\angle AOB = 135^\circ$.
- Периметр правильного четырехугольника, вписанного в окружность, на $16(\sqrt{2} - 1)$ см меньше периметра правильного четырехугольника, описанного около этой же окружности. Найдите радиус окружности.

II вариант

- Около правильного шестиугольника описана окружность и в него вписана окружность. Найдите площадь меньшего круга и длину окружности, ограничивающей его, если радиус большей окружности равен $6\sqrt{3}$ см.
- Длина дуги окружности с градусной мерой 150° равна 10π см. Вычислите площадь соответствующего данной дуге кругового сектора.
- Рис. 281. Вычислите площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если $BO = 3$ см, $\angle AOB = 120^\circ$.
- Периметр правильного треугольника, описанного около окружности, на $18\sqrt{5}$ см больше периметра правильного треугольника, вписанного в эту же окружность. Найдите радиус окружности.

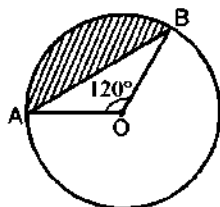


Рис 281

III уровень

I вариант

1. Вписанный в круг квадрат разделит его на пять частей. Найдите отношение площади меньшей из полученных частей к площади большей, если сторона квадрата равна 8.
2. Центр окружности совпадает с вершиной квадрата, а ее радиус равен 60% стороны квадрата. В каком отношении дуга окружности, расположенная внутри квадрата, делит его площадь?
3. Из точки A к окружности с центром O и радиусом, равным 6 см, проведены две касательные AB и AC , образующие между собой угол в 120° . Найдите периметр и площадь фигуры, ограниченной отрезками AB и AC и дугой BC окружности, если центр окружности не содержится во внутренней области полученной фигуры.
- 4*. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и $\sqrt{3}$ равно 1. Найдите площади образовавшихся луночек и общей части кругов.

II вариант

1. Вписанный в круг правильный треугольник разделит его на четыре части. Найдите отношение площади большей из полученных частей к площади меньшей, если сторона треугольника равна $4\sqrt{3}$.
2. Центр окружности совпадает с вершиной равностороннего треугольника, а ее радиус равен 60% стороны треугольника. В каком отношении дуга окружности, расположенная внутри треугольника, делит его площадь?
3. Из точки A к окружности с центром O и радиусом, равным 8 см, проведены две касательные AB и AC , образующие между собой угол в 60° . Найдите периметр и площадь фигуры, ограниченной отрезками AB и AC и дугой BC окружности, если центр окружности содержится во внутренней области полученной фигуры.
- 4*. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 1 равно $\sqrt{3}$. Найдите площади образовавшихся луночек и общей части кругов.

Ответы к задачам контрольной работы

I уровень

I вариант:

- | | |
|--|---|
| 1. $S = 25\pi \text{ см}^2$; $C = 10\pi \text{ см}$; | 2. $C = 4\pi \text{ см}$; $S = \frac{16\pi}{3} \text{ см}^2$; |
| 3. $8\sqrt{3} \text{ дм}$; | 4. $16\pi - 8\sqrt{3}$. |

II вариант:

1. $S = 9\pi \text{ см}^2$; $C = 6\pi \text{ см}$;

2. $C = \frac{25\pi}{3} \text{ см}$; $S = \frac{125\pi}{3} \text{ см}^2$;

3. $9\sqrt{3} \text{ дм}$;

4. $50\pi - 50$.

II уровень**I вариант:**

1. $S = 12\pi \text{ см}^2$; $C = 4\sqrt{3}\pi \text{ см}$;

2. $48\pi \text{ см}^2$;

3. $(6\pi - 4\sqrt{2}) \text{ см}^2$;

4. $2\sqrt{2} \text{ см}$.

II вариант:

1. $S = 81\pi \text{ см}^2$; $C = 18\pi \text{ см}$;

2. $60\pi \text{ см}^2$;

3. $(3\pi - \frac{9}{4}) \text{ см}^2$;

4. $2\sqrt{15} \text{ см}$.

III уровень**I вариант:**

1. $\frac{\pi - 2}{8}$;

2. $\frac{100 - 9\pi}{9\pi}$;

3. $P = (4\sqrt{3} + 2\pi) \text{ см}$; $S = (12\sqrt{3} - 6\pi) \text{ см}^2$;

4. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$; $\frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}$; $\frac{17\pi}{6} - \sqrt{3}$.

II вариант:

1. $\frac{9\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$;

2. $\frac{25\sqrt{3} - 6\pi}{6\pi}$;

3. $P = \left(8\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right) \text{ см}$; $S = \left(64\sqrt{3} + \frac{128\pi}{3}\right) \text{ см}^2$;

4. $\frac{17\pi}{6} + \sqrt{3}$; $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6} - \sqrt{3}$.

ДВИЖЕНИЯ

Основная цель данной главы – познакомить учащихся с понятием движения на плоскости: осевой и центральной симметриями, параллельным переносом, поворотом. Здесь вводятся понятия отображения плоскости на себя, движения, наложения.

Понятие отображения плоскости на себя как основы для введения понятия движения рассматривается на интуитивном уровне с привлечением уже известных учащимся понятий осевой и центральной симметрий. Изучение понятия движения и его свойств дается в ознакомительном плане.

Наложение, одно из основных понятий изучаемого курса геометрии, есть отображение плоскости на себя.

Особое внимание следует уделить выработке навыков построения образов точек, отрезков, треугольников при симметриях, параллельном переносе, повороте.

Урок 51 Понятие движения

Цели урока:

- Ввести понятия отображения плоскости на себя и движения.
- Рассмотреть осевую и центральную симметрии.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Анализ ошибок контрольной работы

Разобрать задания, с которыми не справились большинство учащихся. Работу над ошибками рекомендуется выполнить дома.

III. Повторение темы «Центральная и осевая симметрия» (Фронтальная работа с классом.)

1. Рис. 282. На координатной плоскости имеются точки $A(2; 3)$, $B(-4; 6)$, $C(2; 0)$, $D(0; -5)$. Отметьте точки:
 - а) симметричные A и D относительно оси Oy ;
 - б) симметричные B и C относительно оси Ox ;
 - в) симметричные A и B относительно начала координат.

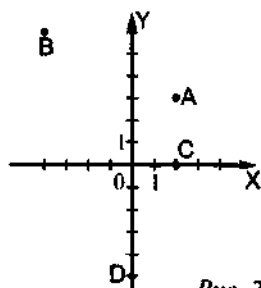


Рис 282

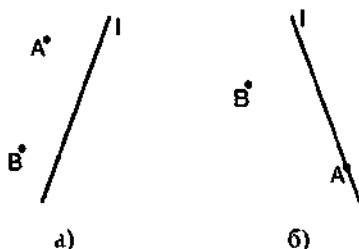


Рис 283

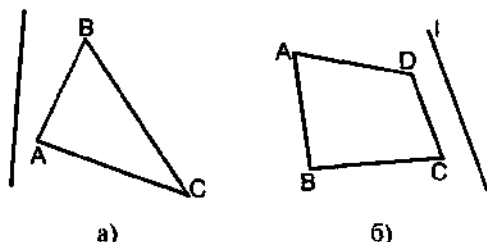


Рис 284

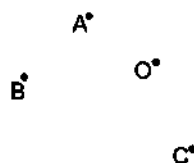


Рис 285

- Постройте точки, симметричные A и B относительно прямой l : рис. 283 а, б).
- Постройте фигуры, симметричные данным относительно прямой l : рис. 284 а, б).
- Постройте точки, симметричные данным относительно точки O : рис. 285.
- Постройте фигуры, симметричные данным относительно точки O : рис. 286 а, б).
- Какие условия должны выполняться, чтобы точка A_1 была симметричной точке A относительно:
 - прямой l ;
 - точки O ?
- Существуют ли точки, для которых не существует точек, симметричных данной относительно: а) прямой; б) точки?

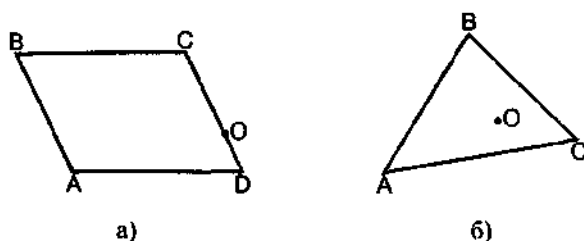


Рис 286

IV. Изучение нового материала

1 Ввести понятие отображения плоскости на себя.

- Пусть каждой точке плоскости ставится в соответствие какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке. В таком случае говорят, что дано отображение плоскости на себя. Приведите примеры из курса геометрии, когда мы встречаемся с отображением плоскости на себя. (*Осевая симметрия, центральная симметрия.*)
- Докажите, что осевая симметрия есть отображение плоскости на себя.

Примерный ход рассуждений:

Пусть имеется прямая l , являющаяся осью симметрии. Тогда произвольной точке X ставится в соответствие точка X_1 следующим образом: из точки X нужно провести перпендикулярную прямую к прямой l и от точки пересечения этих прямых (Y) отложить на прямой XY отрезок YX_1 , равный XY . Точка X_1 – искомая. Любой точке X можно сопоставить точку X_1 , т. к. от любой точки можно опустить перпендикуляр на данную прямую. В случае, если точка X лежит на прямой l , то она сопоставляется сама себе.

Вывод: Осевая симметрия является отображением плоскости на себя.

- Является ли центральная симметрия отображением плоскости на себя? (*Центральная симметрия есть отображение плоскости на себя.*)

Если O – центр симметрии, X – произвольная точка плоскости, то точке X будем сопоставлять точку X_1 следующим образом: соединим точки X и O отрезком и продолжим его за точку O на расстояние, равное OX , отметим точку X_1 . X_1 – искомая точка. Очевидно, что для каждой точки X найдется симметричная ей точка относительно точки O . Точка O симметрична сама себе.

2. Ввести понятие движения.

- Каким общим свойством обладают осевая и центральная симметрии?

Наводящие вопросы:

- Вернемся к заданию № 3. В какую фигуру отобразился $\triangle ABC$ при осевой симметрии? А четырехугольник $ABCD$?
- В задании № 5 нужно было построить фигуры, симметричные данным относительно точки. В какую фигуру отобразился четырехугольник $ABCD$? А $\triangle ABC$?
- Сохранилось ли расстояние между двумя точками при осевой симметрии? При центральной симметрии?

Определение. Отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние, называют *движением*.

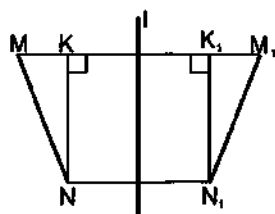


Рис. 287

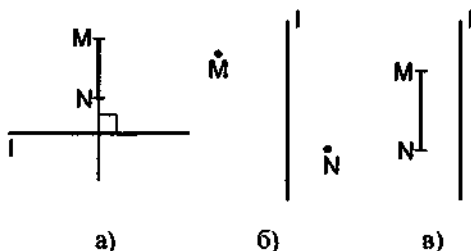


Рис. 288

Задания для учащихся

1. Пусть M и N какие-либо точки, l — ось симметрии. M_1 и N_1 — точки, симметричные точкам M и N относительно прямой l . Докажите, что расстояние между точками M и N при осевой симметрии сохраняется, т. е. $MN = M_1N_1$.

Учащимся дается 3–5 минут на обдумывание, а затем обсуждаются различные варианты ответов.

При необходимости можно сделать подсказки:

Рис. 287.

- 1) из точек N и N_1 опустите перпендикуляры на прямую MM_1 .
- 2) докажите, что $\triangle MNK = \triangle M_1N_1K_1$.
- 3) докажите, что $MK = M_1K_1$, $NK = N_1K_1$.

2. Докажите, что центральная симметрия есть движение.

Подсказки:

- 1) Возьмите точки M и N и O — центр симметрии. Постройте точки M_1 и N_1 , симметричные точкам M и N относительно точки O . Докажите, что $\triangle OMN = \triangle OM_1N_1$.

Задание для самостоятельной работы

Докажите, что осевая симметрия есть движение для следующего расположения точек M и N : рис. 288 а, б, в).

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Пп. 113, 114 (до теоремы); вопросы 1–6.

Решить задачи № 1148 (а), № 1149 (б), задачи № 86, № 87 из рабочей тетради.

Урок 52

Свойства движений

Цели урока:

- Рассмотреть свойства движений.
- Научить учащихся применять свойства движений при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос (фронтальная работа с классом).
 - Сформулируйте определение отображения плоскости на себя.
 - Приведите примеры отображения плоскости на себя.
 - Докажите, что осевая (центральная) симметрия является отображением плоскости на себя.
 - Что такое движение?
 - Являются ли осевая и центральная симметрии движениями?

2. Индивидуальная работа у доски.

Два ученика готовят ответы на вопросы в то время, пока идет фронтальный теоретический опрос. Их ответы заслушиваются, оцениваются всем классом.

- Какое отображение плоскости называют осевой симметрией? Докажите, что осевая симметрия есть движение.
- Какое отображение плоскости называют центральной симметрией? Докажите, что центральная симметрия есть движение.

*Индивидуальная работа по карточкам***I уровень (карточка № 1)**

1. Рис. 289. Постройте фигуру, симметричную данной относительно точки O .
2. Рис. 290. Постройте фигуру, симметричную данной относительно прямой l .

II уровень (карточка № 2)

1. Постройте тупоугольный треугольник и его образ при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису внешнего угла, смежного с его тупым углом.
2. Постройте произвольный треугольник и его образ при симметрии относительно точки пересечения его медиан.

III уровень (карточка № 3)

1. Постройте тупоугольный треугольник и его образ при симметрии относительно точки пересечения его высот.
2. С помощью циркуля и линейки постройте ось симметрии равнобедренной трапеции.

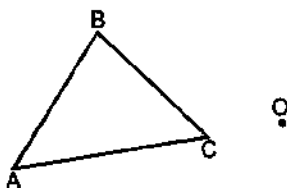


Рис 289

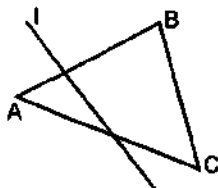


Рис 290

III. Изучение нового материала

- Вспомните, что называют движением. Перечислите те свойства движений, которые вам уже известны. (При движении сохраняется расстояние между точками.)
- Как вы думаете, в какую фигуру при движении отображается отрезок? (Отрезок при движении отображается на отрезок.)
- Действительно, отрезок при движении отображается на отрезок, но истинность данного утверждения нам с вами нужно сегодня доказать.

Теорема

При движении отрезок отображается на отрезок.

Дано: отрезок MN , при движении точка M отображается в точку M_1 , точка N – в точку N_1 .

Доказать: отрезок MN отображается в отрезок M_1N_1 .

Доказательство: Пусть P – произвольная точка отрезка MN , которая при движении отображается в P_1 . Т. к. $P \in MN$, то $MP + PN = MN$. При движении сохраняется расстояние между точками, поэтому $M_1N_1 = MN$, $M_1P_1 = MP$, $N_1P_1 = NP$, отсюда $M_1P_1 + N_1P_1 = MP + NP = MN = M_1N_1$, т. е. $M_1P_1 + N_1P_1 = M_1N_1$, а это значит, что $P_1 \in M_1N_1$. Итак, точки отрезка MN отображаются в точки отрезка M_1N_1 .

Докажем, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 отображается какая-нибудь точка P отрезка MN .

Т. к. $P_1 \in M_1N_1$, то $M_1N_1 = M_1P_1 + P_1N_1 = MP + PN = MN$, т. е. $P \in MN$. Теорема доказана.

Задание учащимся:

- Выясните, в какую фигуру при движении отображается треугольник, и докажите справедливость своего утверждения.

(Дать учащимся 2–3 минуты на обдумывание, а затем выслушать все варианты ответов.)

Ответ: При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

Доказательство можно организовать с использованием только что доказанной теоремы, в этом случае получим равенство треугольников по трем сторонам.

- В какую фигуру отображается при движении прямая, луч?
- В какую фигуру отображается при движении произвольный четырехугольник, окружность?
- В какую фигуру отображается при движении угол?

IV. Закрепление изученного материала

1. Разобрать решение задачи № 1152 (б)

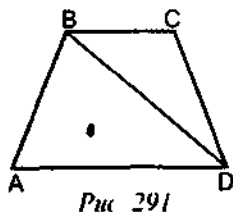
Задача № 1152 (б)

Решение (рис. 291). При движении отрезок отображается на отрезок, треугольник – на равный ему треугольник, угол – на равный ему угол.

Используя эти свойства движений, можно получить различные способы решений, а именно:

- а) $\triangle ABD \rightarrow \triangle A_1B_1D_1$, $\triangle BCD \rightarrow \triangle B_1C_1D_1$, $\Rightarrow$
 $\Rightarrow ABCD \rightarrow A_1B_1C_1D_1$, причем $ABCD =$
 $= A_1B_1C_1D_1$, т. к. $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$, $\triangle BCD =$
 $= \triangle B_1C_1D_1$.

- б) $AB \rightarrow A_1B_1$, $AD \rightarrow A_1D_1$, $BC \rightarrow B_1C_1$, $CD \rightarrow C_1D_1$;
 $\angle A \rightarrow \angle A_1$, $\angle B \rightarrow \angle B_1$, $\angle C \rightarrow \angle C_1$, $\angle D \rightarrow \angle D_1$, причем $AB = A_1B_1$,
 $AD = A_1D_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
 $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, тогда $ABCD \rightarrow A_1B_1C_1D_1$, причем
 $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.



2. Решить самостоятельно задачи № 1152 (в), № 1158, дополнительные задачи.

Дополнительные задачи

- Докажите, что при движении смежные углы отображаются на смежные, а вертикальные – на вертикальные.
- Докажите, что при движении подобные треугольники отображаются на подобные треугольники.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Пп. 114, 115; вопросы 7–13.

Решить задачу № 88 из рабочей тетради, № 1150 (устно), № 1153, № 1152 (а), № 1159.

Урок 53

Решение задач по теме «Понятие движения. Осевая и центральная симметрия»

Цели урока:

- Закрепление теоретических знаний по изучаемой теме.
- Совершенствование навыков решения задач на построение фигур при осевой и центральной симметрии.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

- Теоретический опрос по вопросам 7–13.
(Фронтальная работа с классом.)

- Проверка домашнего задания.

Во время теоретического опроса два ученика готовят на доске решения задач № 1153, № 1159, затем их ответы заслушиваются.

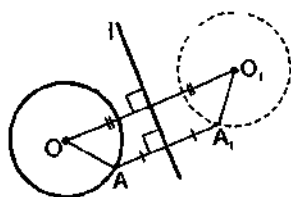


Рис. 292

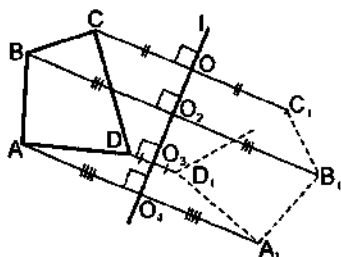


Рис. 293

Задача № 1153**Решение** (рис. 292):

При движении сохраняются расстояния, т. е. $OA = OA_1$, где A – произвольная точка окружности, O – центр окружности.

Каждая точка окружности отображается в точку на окружности, симметричную данной относительно прямой l .

Задача № 1159**Ход построения** (рис. 293):

- 1) $CO_1 \perp l, CO_1 = C_1O_1$
- 2) $BO_2 \perp l, BO_2 = B_1O_2$
- 3) $AO_4 \perp l, AO_4 = A_1O_4$
- 4) $DO_3 \perp l, DO_3 = D_1O_3$
- 5) $A_1B_1C_1D_1$ – искомая фигура F , равная четырехугольнику $ABCD$.

III. Решение задач

1. Разобрать решение задачи № 1157.

Задача № 1157

Дано: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограммы.

$AB = A_1B_1, AD = A_1D_1, \angle A = \angle A_1$.

Доказать: $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

Решение (рис. 294): В параллелограмме противоположные стороны и углы равны $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD, AD = CB, \angle A = \angle C$);
 $\triangle A_1B_1D_1 = \triangle A_1C_1D_1$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1B_1 = C_1D_1, A_1D_1 = C_1B_1, \angle A_1 = \angle C_1$);
 $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB =$

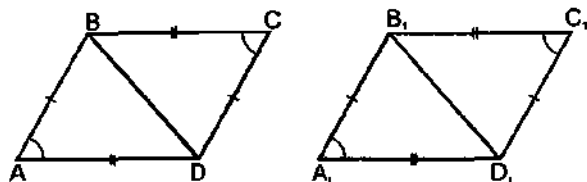


Рис. 294

$= A_1B_1, AD = A_1D_1, \angle A = \angle A_1$ по условию) $\Rightarrow \triangle CDB = \triangle C_1D_1B_1$.
 $ABCD = \triangle ABD + \triangle CDB = \triangle A_1B_1D_1 + \triangle C_1D_1B_1 = A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось доказать.

Наводящие вопросы для учащихся:

- Проведем в параллелограммах $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ диагонали BD и B_1D_1 . Что вы можете сказать о получившихся треугольниках? Обоснуйте свое утверждение.
 - Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны.
2. Решить самостоятельно задачи с последующим обсуждением решения.

а) При помощи одной линейки постройте ось симметрии равнобедренной трапеции.

Указания к решению: см. рис. 295.

б) На рис. 296 изображены две окружности и прямая l . Найдите на этих окружностях точки, симметричные друг другу относительно прямой l .

Указания к решению: см. рис. 297.

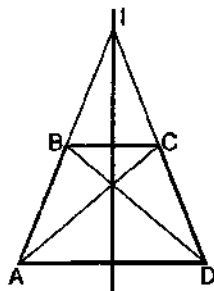


Рис. 295

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной:
 - а) относительно вершины D ;
 - б) относительно диагонали AC .
2. Докажите, что при движении квадрат отображается на квадрат.

II вариант

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной:
 - а) относительно вершины A ;
 - б) относительно диагонали BD .
2. Докажите, что при движении прямоугольник отображается на прямоугольник.

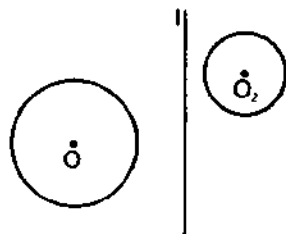


Рис. 296

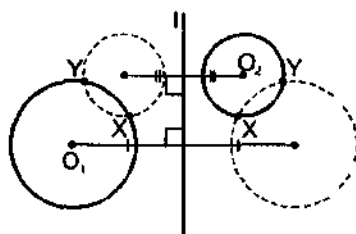


Рис. 297

II уровень**I вариант**

1. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной относительно:
 - а) биссектрисы угла A ;
 - б) точки пересечения ее диагоналей.
2. Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

II вариант

1. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, симметричную данной относительно:
 - а) биссектрисы угла B ;
 - б) точки пересечения ее диагоналей.
2. Докажите, что при движении перпендикулярные прямые отображаются на перпендикулярные прямые.

III уровень**I вариант**

Дан треугольник ABC . Постройте фигуру, симметричную данной относительно:

- а) центра вписанной в него окружности;
- б) биссектрисы одного из его внешних углов.

II вариант

Дан треугольник ABC . Постройте фигуру, симметричную данной относительно:

- а) центра описанной около него окружности;
- б) биссектрисы одного из его внешних углов.

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Решить задачи № 1155, № 1156, № 1160, № 1161.

Урок 54**Параллельный перенос****Цели урока:**

- Познакомить учащихся с параллельным переносом и доказать, что параллельный перенос есть движение.
- Показать применение параллельного переноса при решении задач.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Анализ ошибок самостоятельной работы**

Разобрать задания, с которыми не справились большинство учащихся.

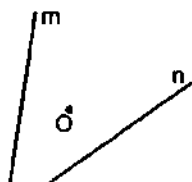


Рис 298

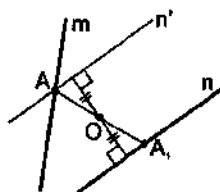


Рис 299

Работа над ошибками проводится самостоятельно.

Учащимся, которые успешно справились с заданиями самостоятельной работы, можно предложить задачи следующего уровня или дополнительные задачи:

Задача 1

Рис. 298. Даны прямые m и n точка O . На этих прямых найдите точки, симметричные друг другу относительно точки O .

Указания к решению:

Рис. 299. n и n' симметричны относительно точки O .

Задача 2

Рис. 300. Отрезки AB и A_1B_1 симметричны относительно точки O , точка C_1 симметрична точке C относительно точки O , причем $C_1 \in A_1B_1$. Найдите точки O и C_1 .

Указания к решению: см. рис. 301.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие параллельного переноса.

Определение: Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1 , что $\overline{MM_1} = \vec{a}$.

Примеры:

а) Осуществим параллельный перенос треугольника ABC на вектор $\vec{a}$. Для этого отложим вектор $\vec{a}$ от точек A, B, C . Концы вектора обозначим A_1, B_1, C_1 . $\triangle A_1B_1C_1$ – искомый. (Рис. 302.)

б) Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(2; 5), B(-3; 7), C(-1; -1), D(-6; 1)$. Укажите координаты вершин четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, полученного путем параллельного пе-

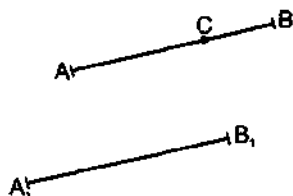


Рис 300

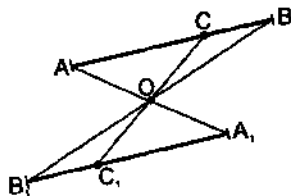


Рис 301

реноса на вектор $\vec{a} \{-2; 3\}$ из четырехугольника $ABCD$.

Примечание: формулы параллельного переноса учащимся не известны, но в хорошо подготовленном классе учащиеся быстро сообразят, что координаты вершин четырехугольника $ABCD$ надо изменить на координаты вектора $\vec{a}$.

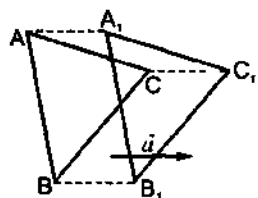


Рис. 302

Ответ: $A_1(0; 8)$, $B_1(-5; 10)$, $C_1(-3; 2)$, $D_1(-8; 4)$.

2. Доказать, что параллельный перенос является движением.

– Как вы думаете, является ли параллельный перенос движением? (*Параллельный перенос есть движение.*)

Теорема: Параллельный перенос есть движение (т. е. отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние).

Дано: параллельный перенос на $\vec{a}$, $M \rightarrow M_1$, $N \rightarrow N_1$.

Доказать: параллельный перенос есть движение (сохраняется расстояние между точками M и N , т. е. $MN = M_1N_1$).

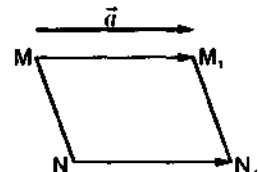


Рис. 303

Доказательство (рис. 303):

– Что можно сказать о четырехугольнике MM_1N_1N ?

MM_1N_1N ? (MM_1N_1N – параллелограмм, т.к. $\overline{MM_1} = \vec{a}$, $\overline{NN_1} = \vec{a}$, значит $|\overline{MM_1}| = |\overline{NN_1}|$ и $MM_1 \parallel NN_1$.)

– Сохранилось ли расстояние между точками M и N ? (*Расстояние сохранилось, т. к. в параллелограмме MM_1N_1N противоположные стороны MN и M_1N_1 равны.*)

– Можно ли утверждать, что параллельный перенос есть движение? (*Да, т. к. он сохраняет расстояние.*)

– При доказательстве теоремы мы рассмотрели случай, когда точки M и N лежат на прямой, не параллельной вектору $\vec{a}$. Сохранится ли расстояние между точками M и N в случае, если они лежат на прямой, параллельной вектору $\vec{a}$? Рассмотрите этот случай самостоятельно, а затем мы обсудим предложенные доказательства.

Возможные варианты доказательства:

а) Рис. 304. Т. к. $\overline{MM_1} = \vec{a}$, $\overline{NN_1} = \vec{a}$, то $MM_1 = NN_1 = |\vec{a}|$.

Тогда $MN = MM_1 - M_1N = NN_1 - M_1N = M_1N_1$, откуда следует, что расстояние между точками M и N при параллельном переносе сохранилось.

б) Рис. 305. $\overline{MM_1} = \vec{a}$, $\overline{NN_1} = \vec{a}$, поэтому $MM_1 = NN_1$, тогда $MN = MM_1 + M_1N$; $M_1N_1 = M_1N + NN_1$, откуда $MN = M_1N_1$.

Итак, теорема доказана.

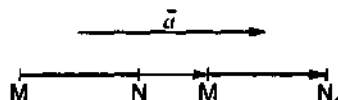


Рис. 304

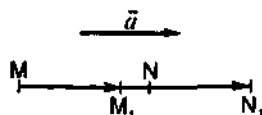


Рис. 305

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 89 из рабочей тетради (самостоятельно; менее подготовленные учащиеся – под контролем учителя).

2. Решить самостоятельно задачу № 1164 из учебника и дополнительные задачи № 1, № 2.

Дополнительные задачи

1. В результате параллельного переноса вершины квадрата $ABCD$ переходят соответственно в вершины квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты точек B_1, C_1, D_1 , если $A(1; -2), A_1(5; 6), B(4; 2), C(0; 5), D(-3; 1)$.

Ответ: $B_1(8; 10), C_1(4; 13), D_1(1; 9)$.

2. Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 10 = 0$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a} \{2; 4\}$.

Ответ: $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 15$.

3. Рис. 306. Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Образ точки M при этом же параллельном переносе постройте только при помощи циркуля.

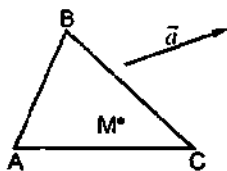


Рис. 306

Указание: M_1 – точка пересечения окружностей с центрами в точках A_1 и C_1 и радиусами, равными AM и CM соответственно.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 116; вопросы 14, 15.

Решить задачи № 1162, 1163, 1165, дополнительную задачу № 3.

Урок 55

Поворот

Цели урока:

- Познакомить учащихся с поворотом.
- Доказать, что поворот есть движение.
- Научить учащихся осуществлять поворот фигуры.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Проверить домашние задачи № 1165 и дополнительную задачу 3.

Самостоятельно решить задачи (с последующим обсуждением решения).

I уровень:

В прямоугольном треугольнике ABC CK – биссектриса, точки M и N лежат на CK так, что M лежит между C и N . Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$.

II уровень:

Найдите уравнение кривой, из которой получена парабола $y = x^2 - 3x + 4$ параллельным переносом на вектор $\vec{a} \{-1; -1\}$.

(Ответ: $y = x^2 - 5x + 9$.)

В это время 3–6 учащихся работают по индивидуальным карточкам:

I уровень (карточка № 1)

1. Рис. 307. Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.
2. Укажите координаты точек A' , B' , если известно, что они являются образами точек $A(2; 5)$, $B(-1; -3)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a} \{-3; 2\}$.

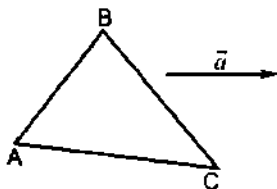


Рис. 307

II уровень (карточка № 2)

1. Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом A и ее образ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, равный $\overrightarrow{AC}$.
2. В результате параллельного переноса прямоугольник $ABCD$ перешел в прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты вершин B , C , D , если $A(1; 1)$, $A_1(2; 3)$, $B_1(4; 1)$, $C_1(9; 6)$, $D_1(7; 8)$.

III уровень (карточка № 3)

1. Постройте треугольник ABC и его образ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CM}$, где M – точка пересечения медиан данного треугольника.
2. Составьте уравнение прообраза окружности $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a} \{1; 3\}$.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие поворота.

Определение: Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1 , что $OM = OM_1$, $\angle MOM_1 = \alpha$.

Рис. 308.

α – угол поворота; O – центр поворота.

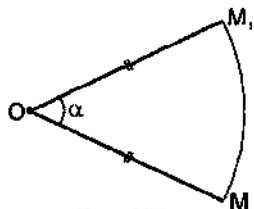


Рис. 308

Примеры:

а) Построить образ отрезка AB при повороте вокруг точки O на 60° против часовой стрелки.

Ход построения (рис. 309):

Построить $\angle AOA_1 = 60^\circ$, $OA = OA_1$.

Построить $\angle BOB_1 = 60^\circ$, $OB = OB_1$.

A_1B_1 — образ отрезка AB при повороте вокруг точки O на 60° против часовой стрелки.

б) Построить образ $\triangle ABC$ при повороте вокруг точки A на 45° по часовой стрелке.

Ход построения (рис. 310):

Построить $\angle BAB_1 = 45^\circ$, $AB = AB_1$.

Построить $\angle CAC_1 = 45^\circ$, $AC = AC_1$.

Построить $\triangle AB_1C_1$.

2. Доказать, что поворот есть движение.

Вопрос учащимся:

— Как вы думаете, является ли поворот движением? Обоснуйте свой ответ.

Учащимся дается 3–5 минут на обдумывание, а затем заслушиваются варианты ответов.

Рис. 311. Поворот есть движение. Докажем, что поворот сохраняет расстояния. Возьмем точки M и N и осуществим поворот данных точек на угол α . Образы точек M и N назовем M_1 и N_1 соответственно. Рассмотрим $\triangle OMN$ и $\triangle OM_1N_1$. У них по определению поворота $OM = OM_1$, $ON = ON_1$, $\angle MON = \angle MOM_1 - \angle NOM_1 = \alpha - \angle NOM_1$, $\angle M_1ON_1 = \angle NON_1 - \angle NOM_1 = \alpha - \angle NOM_1$, следовательно, $\triangle OMN = \triangle OM_1N_1$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $MN = M_1N_1$, т. е. при повороте сохраняются расстояния, а это значит, поворот есть движение.

IV. Закрепление изученного материала

1. Разобрать задачу № 90 из рабочей тетради.

2. Решить самостоятельно задачи:

I уровень — № 1166 (а, в), № 92 из рабочей тетради.

II уровень — № 1166 (а), № 1169, дополнительные задачи № 1, 2.

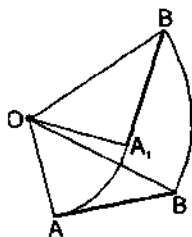


Рис 309

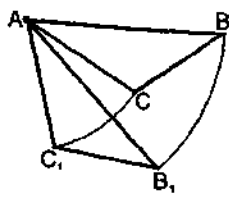


Рис 310

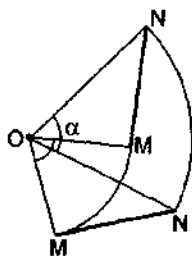


Рис 311

Дополнительные задачи

1. Рис. 312. Постройте образ угла ABC при повороте вокруг точки O на 120° против часовой стрелки.
2. Докажите, что при повороте правильного шестиугольника на 120° вокруг своего центра он отображается сам на себя.

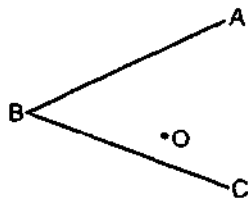


Рис. 312

V. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

П. 117; вопросы 16, 17.

Решить задачи:

I уровень – № 1166 (6), № 1167; № 91 из рабочей тетради;

II уровень – № 1168, № 1167; дополнительную задачу № 2.

Урок 56**Решение задач по теме «Параллельный перенос. Поворот»****Цели урока:**

- Систематизировать теоретические знания по изучаемой теме.
- Совершенствовать навыки решения задач на построение с использованием параллельного переноса и поворота.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся**

1. Два ученика у доски готовят развернутый ответ на вопросы:
 - Какое отображение плоскости называется параллельным переносом? Приведите примеры.
 - Какое отображение плоскости называется поворотом? Приведите примеры.
2. Письменный теоретический опрос.
Два-четыре ученика доказывают:
 - Параллельный перенос есть движение.
 - Поворот есть движение.

III. Самостоятельное решение задач**I уровень**

1. Постройте тупоугольный треугольник ABC и его образ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$, где AM – высота треугольника ($\angle B$ – тупой).
2. Постройте ромб $ABCD$ и его образ при повороте вокруг точки A на 100° против часовой стрелки.

II уровень

1. При параллельном переносе прямая $2x - y + 2 = 0$ переходит в прямую $4x - 2y - 1 = 0$, а прямая $x + y + 1 = 0$ — в прямую $x + y - 3 = 0$. Найдите координаты точки, в которую при этом параллельном переносе переходит точка $A(-1; 1)$.
2. Рис. 313. На двух данных окружностях найдите пару точек, таких что поворот вокруг данной точки O на 60° отображает одну точку этой пары на другую.

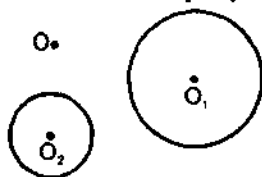


Рис. 313

Ответы и указания к задачам II уровня

1. Ответ: $\frac{7}{6}; \frac{17}{6}$.

Прямые $2x - y + 2 = 0$ и $x + y + 1 = 0$ пересекаются в точке $A_1(-1; 0)$. Прямые $4x - 2y - 1 = 0$ и $x + y - 3 = 0$ пересекаются в

точке $A_2 \left(\frac{7}{6}; \frac{11}{6} \right)$.

Точка A_1 при параллельном переносе отображается в точку A_2 , значит $\overline{A_1 A_2}$ — вектор параллельного переноса $\overline{A_1 A_2} \left\{ \frac{13}{6}; \frac{11}{6} \right\}$.

Тогда точка $A(-1; 1)$ при данном параллельном переносе отображается в точку $B \left(\frac{7}{6}; \frac{17}{6} \right)$.

2. Осуществите поворот окружности с центром в точке O_2 относительно точки O на 60° против часовой стрелки.

III. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Постройте его образ при параллельном переносе на вектор $\overline{AO}$, где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.
2. Постройте ромб и его образ при повороте вокруг одной из его вершин на 60° против часовой стрелки.

II вариант

1. Дана трапеция $ABCD$. Постройте ее образ при параллельном переносе на вектор $\overline{BO}$, где O — точка пересечения диагоналей трапеции.
2. Постройте прямоугольник и его образ при повороте вокруг одной из его вершин на 45° по часовой стрелке.

II уровень

I вариант

1. Дана трапеция $ABCD$. Известно, что при некотором параллельном переносе точка A отображается в точку C . Постройте

фигуру, в которую отображается $\triangle ABD$ при данном параллельном переносе.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом B , равным 120° . При некотором повороте точка A отображается на точку B , а точка B – на точку C . Постройте центр поворота.

II вариант

1. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом B . Постройте фигуру, в которую отображается данный треугольник при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BH}$, где H – точка пересечения высот $\triangle ABC$.
2. Дан равнобедренный треугольник ABC с прямым углом B . При некотором повороте точка A отображается на точку B , а точка B – на точку C . Постройте центр поворота.

III уровень

I вариант

1. Даны угол ABC и точка M внутри него. Найдите на сторонах угла такие точки D и E , чтобы при параллельном переносе точка B отображалась на точку D , а точка E – на точку M .
2. Рис. 314. Даны прямые a, b и точка O . На прямых найдите точки, одна из которых переходит в другую при повороте на 60° вокруг точки O .

II вариант

1. Даны угол ABC и точка K вне его. Найдите на сторонах угла такие точки M и N , чтобы при параллельном переносе точка B отображалась на точку M , а точка K – на точку N .
2. Рис. 315. Даны прямые a, b и точка O . На прямых найдите точки, одна из которых переходит в другую при повороте на 45° вокруг точки O .

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Вопросы 1–17.

Решить задачи № 1170, № 1171 и дополнительную задачу.

Дополнительная задача

Дана трапеция $ABCD$. Известно, что при параллельном переносе прямая AD отображается на прямую BC , а прямая BD отображается

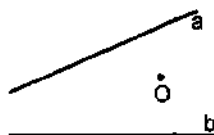


Рис. 314

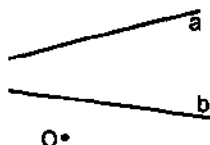


Рис. 315

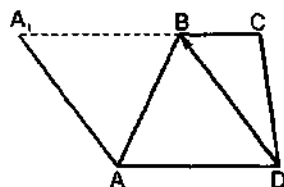


Рис. 316

на себя. Постройте точку, в которую переходит точка A при этом параллельном переносе.

Решение (см. рис. 316):

$\overrightarrow{DB}$ – вектор параллельного переноса. Точка A отображается в точку A' . ($\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DB}$)

Урок 57

Решение задач по теме «Движения»

Цели урока:

- Закрепление знаний учащихся по теме «Движения».
- Развитие умений решать задачи с применением движений.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся. Повторение принципов основных преобразований плоскости

К доске вызвать четырех учащихся. Каждый из них готовит развернутый ответ на вопросы:

- Какое отображение плоскости на себя называют:
 - а) осевой симметрией;
 - б) центральной симметрией;
 - в) параллельным переносом;
 - г) поворотом?
- Приведите примеры.

Пока учащиеся готовятся у доски, можно провести фронтальный теоретический опрос по вопросам:

- Что называют движением плоскости?
- Перечислите основные свойства движений.
- Верно ли утверждение, что при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру?
- Перечислите известные вам преобразования плоскости, являющиеся движениями.
- Каков алгоритм доказательства теорем, утверждающих, что данное преобразование плоскости есть движение?
- Рис. 317. Определите, с помощью каких преобразований плоскости можно перевести:
 - а) фигуру F_1 в фигуру F_2 ;
 - б) фигуру F_1 в фигуру F_3 ;
 - в) фигуру F_1 в фигуру F_4 ;
 - г) фигуру F_2 в фигуру F_4 ;
 - д) фигуру F_4 в фигуру F_3 ?

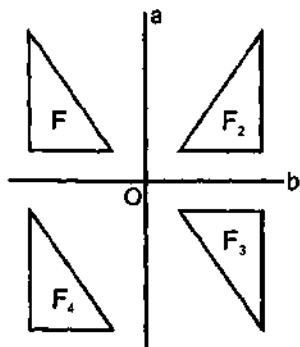


Рис 317

III. Проверка домашнего задания

Разобрать решение домашней задачи № 1171.

1. Даны точка O и прямая a . Постройте прямую a_1 , являющуюся образом прямой a при повороте вокруг точки O на угол 45° по часовой стрелке. Рис. 318.

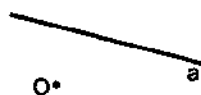


Рис. 318

На доске заранее подготовлен рисунок, один из учащихся вызывается к доске для решения задачи, остальные учащиеся работают в тетрадях.

2. Условия задачи те же, но рисунок другой.

Рис. 319.

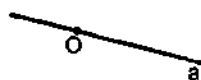


Рис. 319

Устно обсудить идею решения задачи, а затем учащиеся решают ее самостоятельно; один из учащихся также самостоятельно работает у доски.

IV. Решение задач

1. Разобрать решение задачи № 93 из рабочей тетради.

2. Разобрать решение задачи № 1181 учебника.

Задача № 1181

Ход построения (рис. 320):

- а) Построить прямую a' , симметричную прямой a относительно точки O .
- б) Построить прямую c , проходящую через точку O и точку пересечения прямых a' и b – точку M .

Наводящие вопросы:

- Предположим, прямая MN пересекает прямые a и b , а точка O делит отрезок MN пополам (рис. 321). Что вы можете сказать о точках M и N ? (Они симметричны относительно точки O .)
- Укажите на плоскости геометрическое место точек, симметричных каждой точке прямой a . (Они лежат на прямой a' , симметричной прямой a относительно точки O .)

3. Решить самостоятельно задачи № 1174 (а), № 1173, дополнительные задачи № 1, 2, 3.

Задача № 1174 (а)

Решение (рис. 322): Т. к. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольники, то $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$, $AD = BC = A_1D_1 = B_1C_1$, тогда $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$, $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$ по двум катетам.

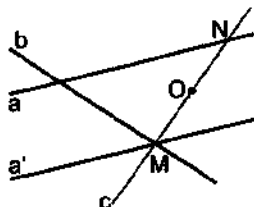


Рис. 320

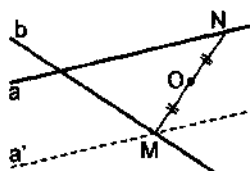


Рис. 321

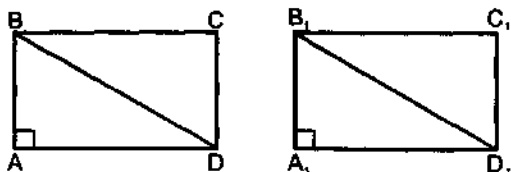


Рис. 322

$ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD = \triangle A_1B_1D_1 + \triangle B_1C_1D_1 = A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось доказать.

Задача № 1173

Возьмем некоторую точку D на плоскости. Допустим D не переходит в D_1 , тогда $\triangle ABD \neq \triangle ABD_1$. Но при движении треугольник отображается на равный ему треугольник. Получили противоречие, следовательно, любая точка данной плоскости отображается на себя.

Дополнительные задачи

1. На плоскости даны две прямые, пересекающиеся под углом 45° . В результате двух последовательных симметрий относительно этих прямых точка A переходит в точку A' , а точка B – в точку B' . Найдите угол между прямыми AB и $A'B'$.

(Ответ: 90° .)

2. Сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя?

(Ответ: 8 движений.)

3. В результате параллельного переноса точка A переходит в точку A' , а прямая l – в прямую l' . Найдите уравнение прямой, если:

а) $A(-2; 5)$, $A'(3; -4)$; уравнение прямой l есть $2x - 3y = 1$;

б) $A(4; 7)$, $A'(-3; 13)$; уравнение прямой l есть $3x + 4y = 5$.

(Ответ: а) $2x - 3y = 38$; б) $3x + 4y = 8$.)

4. Найдите вектор параллельного переноса, если прямая, задаваемая уравнением $y = 3x - 2$, переходит в прямую $y = 3x + 4$, а прямая $3x + 2y = 2$ переходит в прямую $6x + 4y = 3$.

(Ответ: $\vec{a} \left\{ -\frac{25}{18}; \frac{11}{6} \right\}$.)

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи № 1172, № 1174 (б), № 1183, дополнительную задачу № 4.

Урок 58

Решение задач по теме «Движения»

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на движение.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 1172 и дополнительную задачу № 4 (два ученика показывают решение задачи на доске).

Задача № 1172

Пусть C – произвольная точка отрезка AB . Предположим, что при данном движении она переходит в какую-то точку C_1 , не лежащую на отрезке AB . Т. к. точка C_1 не лежит на отрезке AB , то ABC_1 – треугольник, что невозможно, т. к. при движении отрезок переходит в отрезок. Отсюда следует, что любая точка прямой AB отображается на себя.

III. Актуализация знаний

Устное решение задач

1. В результате параллельного переноса точка $A(-1; 3)$ переходит в точку $A'(2; 4)$, а точка $B(1; -3)$ – в точку B' . Найдите координаты точки B' .
2. При осевой симметрии относительно координатной оси Oy точка A переходит в точку A_1 , а точка B – в точку B_1 . Найдите координаты точек A_1 и B_1 , если $A(-2; 5)$, $B_1(-3; -8)$.
3. При центральной симметрии относительно начала координат четырехугольник $ABCD$ переходит в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты точек A, B, C, D , если $A_1(-6; -1)$, $B_1(-5; -8)$, $C_1(-1; -6)$, $D_1(0; 0)$.
4. В результате поворота вокруг начала координат точка $A(4; 0)$ перешла в точку $A'(0; 4)$. Найдите точку, в которую перейдет точка A в результате поворота на $30^\circ, 45^\circ, 120^\circ$ вокруг того же центра и в том же направлении.
5. Какое наименьшее число вершин может иметь многоугольник, у которого есть две оси симметрии, пересекающиеся под углом 30° ?

Самостоятельное решение задач

Этот этап урока идет параллельно с устным решением задач, но для более подготовленных учащихся.

1. На плоскости даны два равных и непараллельных отрезка AB и $A'B'$. Постройте центр поворота, при котором точка A переходит в точку A' , точка B – в точку B' .
2. На плоскости даны два равных отрезка AB и CD . Прямые AB и CD пересекаются в точке P . Пусть окружности, описанные около треугольников ABP и CDP , пересекаются в точке O , отличной от P . Докажите, что в результате поворота вокруг O на угол $\angle AOC$ точка A переходит в C , а точка B – в D .

IV. Решение задач

1. Прочитать решение задачи № 1177 учебника (самостоятельно).

Вызвать к доске одного из учащихся, который запишет краткое решение задачи на доске, остальные учащиеся работают в тетрадях.

2. Разобрать решение задачи № 1179.

Задача № 1179

Решение (рис. 323): Осуществим параллельный перенос $\triangle BSA$ на вектор $\overrightarrow{BC}$, его образом будет $\triangle CS_1D$.

Т. к. $CC_1 \perp SA$, то $CC_1 \perp S_1D$,
т. к. $SA \parallel S_1D$ по свойству параллельного переноса $\Rightarrow CC_1$ – высота $\triangle CS_1D$.

Т. к. $DD_1 \perp SB$, то $DD_1 \perp S_1C$,
т. к. $SB \parallel S_1C$ по свойству параллельного переноса $\Rightarrow DD_1$ – высота $\triangle CS_1D$.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке $\Rightarrow K$ – точка пересечения высот, S_1E – высота $\triangle CS_1D$, т. е. $S_1E \perp CD$.

Т. к. $AB \parallel CD$ как противоположные стороны прямоугольника, то $SK \perp AB$.

Наводящие вопросы и указания к решению задачи:

- Выполните параллельный перенос $\triangle BSA$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.
- Что вы можете сказать о $\triangle CS_1D$? S_1D и S_1C треугольника CS_1D и прямых S_1K и CD ?
- Каково взаимное расположение прямых SK и AB ?

Решить самостоятельно задачу № 1178.

Дополнительные задачи

1. Дана прямая l и точка A . Найдите геометрическое место точек M плоскости таких, что существует поворот на угол 60° с центром на прямой l , переводящий A в M .
2. Дан правильный шестиугольник. Сколько существует различных движений, переводящих его в себя?

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи № 1175, № 1176, № 1178.

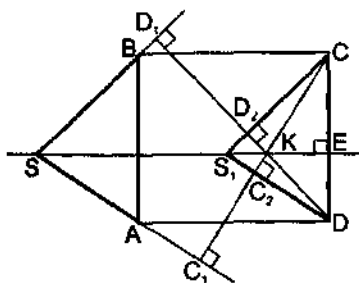


Рис. 323

Урок 59

Подготовка к контрольной работе по теме «Движения»

Цель урока:

- Подготовить учащихся к контрольной работе по теме «Движения».

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Устное решение задач.

1. Какой треугольник имеет:
а) одну ось симметрии;
б) три оси симметрии?
2. Назовите четырехугольники, обладающие:
а) осевой симметрией;
б) центральной симметрией.
3. Докажите, что биссектриса угла является его осью симметрии.
4. При симметрии относительно прямой a точки A и B перешли соответственно в точки A' и B' . Где по отношению к прямой a лежит точка пересечения прямых AB и $A'B'$ при условии, что прямые AB и a не параллельны?
5. На плоскости отмечена 3001 точка. При симметрии относительно некоторой прямой каждая из этих точек переходит в какую-то из отмеченных точек. Докажите, что прямая a проходит хотя бы через одну из отмеченных точек.
6. В результате поворота на 90° против часовой стрелки около начала координат треугольник ABC отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$. Найдите координаты точек A_1 , B_1 , C_1 , если известно, что $A(3; 2)$, $B_1(-5; 0)$, $C_1(-6; 5)$.
7. При параллельном переносе на вектор $\vec{a} \{-2; 5\}$ график функции $y = |x|$ перешел в некоторую линию. Найдите уравнение полученной линии.

Ответы и указания:

1. а) равнобедренный; б) равносторонний.
2. а) квадрат, ромб, прямоугольник, равнобедренная трапеция;
б) параллелограмм, квадрат, ромб, прямоугольник.
3. **Указание:** каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.
4. На прямой a .
5. **Указание:** Если бы ни одна из отмеченных точек не лежала на прямой a , то количество точек было бы числом четным.
6. $A_1(-2; 3)$, $B(0; 5)$, $C(5; 6)$.
7. $y = |x + 2| + 5$.

III. Решение задач подготовительного варианта контрольной работы

Распределить учащихся в группы по 3–4 человека так, чтобы в каждой группе были учащиеся с примерно одинаковым уровнем подготовленности, что позволит избежать бездумного списывания решений задач менее подготовленными учащимися у более подготовленных. Учитель держит под постоянным контролем работу в

группах с менее подготовленными учащимися и консультирует при необходимости группы с более подготовленными учащимися.

I уровень

1. Начертите трапецию $ABCD$ так, чтобы все ее стороны были разными по длине. Постройте ее образ:
 - а) при симметрии относительно прямой BC ;
 - б) при симметрии относительно точки A ;
 - в) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{DO}$, где O – точка пересечения диагоналей;
 - г) при повороте вокруг точки D на 90° по часовой стрелке.

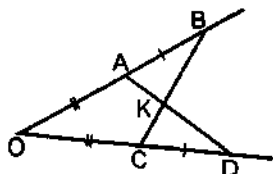


Рис. 324

2. Рис. 324.

Дано: $OA = OC$, $AB = CD$.

Доказать: Используя осевую симметрию, докажите, что OK – биссектриса угла BOD .

II уровень

1. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте его образ:
 - а) при симметрии относительно прямой AK , где K – середина стороны CD ;
 - б) при симметрии относительно точки O , где O – центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности;
 - в) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма;
 - г) при повороте вокруг вершины D на 120° против часовой стрелки.
2. Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 76 = 0$ при:
 - а) осевой симметрии относительно оси Ox ;
 - б) центральной симметрии относительно начала координат;
 - в) при параллельном переносе на вектор $\vec{a} \{3; -4\}$;
 - г) при повороте на 270° по часовой стрелке относительно начала координат.

III уровень

1. Начертите произвольный четырехугольник $ABCD$. Постройте его образ:
 - а) при симметрии относительно прямой CK , являющейся биссектрисой угла BCD ;
 - б) при симметрии относительно точки O , являющейся центром описанной около треугольника ABD окружности;

- в) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$, где M – точка пересечения медиан треугольника ABC , N – точка пересечения биссектрис треугольника ACD ;
- г) при повороте вокруг точки пересечения диагоналей $ABCD$ на 105° против часовой стрелки.
2. При параллельном переносе прямая $x + y - 1 = 0$ перешла в прямую $2x + 2y - 1 = 0$, а прямая $x - 2y + 1 = 0$ – в прямую $x - 2y + 4 = 0$. Найдите вектор параллельного переноса и координаты вершин образа треугольника ABC при этом же параллельном переносе, если известно, что $A(4; 5)$, $B(7; 0)$, $C(-1; -4)$.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи следующего уровня. Учащимся, решившим на уроке задачи III уровня, предложить порешать дома следующие задачи:

1. При параллельном переносе точка $A(-4; -7)$ отобразилась в точку $A_1(-2; 0)$. Найдите уравнение кривой, полученной из параболы $y = x^2 - 3x + 5$ с помощью этого же параллельного переноса.
2. В данный сектор с помощью циркуля и линейки впишите квадрат.
3. В результате некоторого движения точка $A(-3; 1)$ перешла в точку $A_1(3; -4)$, а точка $B(0; 5)$ – в точку $B_1(3; 1)$. В какую точку при таком движении может перейти точка $M(-1; -1)$?

Урок 60

Контрольная работа по теме «Движения»

I уровень

I вариант

1. Начертите ромб $ABCD$. Постройте образ этого ромба:
 - а) при симметрии относительно точки C ;
 - б) при симметрии относительно прямой AB ;
 - в) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AC}$;
 - г) при повороте вокруг точки D на 60° по часовой стрелке.
2. Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр.
- 3*. Начертите два параллельных отрезка, длины которых равны. Начертите точку, являющуюся центром симметрии, при котором один отрезок отображается на другой.

II вариант

1. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте образ этого параллелограмма:
 - а) при симметрии относительно точки D ;
 - б) при симметрии относительно прямой CD ;

- в) при параллельном переносе на вектор $\overline{BD}$;
г) при повороте вокруг точки A на 45° против часовой стрелки.
2. Докажите, что прямая, содержащая середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через точку пересечения его диагоналей.
- 3*. Начертите два параллельных отрезка, длины которых равны. Постройте центр поворота, при котором один отрезок отображается на другой.

II уровень

I вариант

1. Начертите треугольник ABC . Постройте его образ:
- а) при симметрии относительно его высоты, выходящей из вершины A ;
б) при симметрии относительно точки D , являющейся серединой стороны AB ;
в) при параллельном переносе на вектор $\overline{AM}$, где M – точка пересечения медиан треугольника;
г) при повороте вокруг вершины C на 45° против часовой стрелки.
2. Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ при повороте на 90° против часовой стрелки относительно начала координат.
- 3*. Начертите два непараллельных отрезка AB и CD , длины которых равны. Постройте центр поворота, отображающего отрезок AB на CD ($A \rightarrow C, B \rightarrow D$).

II вариант

1. Начертите треугольник ABC . Постройте его образ:
- а) при симметрии относительно биссектрисы его угла B ;
б) при симметрии относительно точки H , если AH – высота треугольника;
в) при параллельном переносе на вектор $\overline{AO}$, где O – центр описанной около треугольника окружности;
г) при повороте вокруг вершины B на 60° по часовой стрелке.
2. Составьте уравнение образа окружности $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 20 = 0$ при повороте на 180° по часовой стрелке относительно начала координат.
- 3*. Дан $\triangle ABC$ и параллельные прямые a и b . Постройте треугольник, равный данному, так, чтобы основание его принадлежало прямой a , а вершина – прямой b .

III уровень

I вариант

1. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте его образ:
 - а) при симметрии относительно прямой, проходящей через вершину D , параллельной диагонали AC ;
 - б) при симметрии относительно точки, являющейся серединой AD ;
 - в) при параллельном переносе на вектор $\overline{AE}$, где $E \in AC$ и $AE : EC = 3 : 1$;
 - г) при повороте вокруг точки пересечения диагоналей на 150° против часовой стрелки.
2. Найдите уравнение кривой, полученной параллельным переносом на вектор $\vec{a} \{1; 1\}$ из параболы $y = x^2 - 3x + 1$.
- 3*. Внутри угла отмечена точка M , не лежащая на его биссектрисе. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M .

II вариант

1. Начертите ромб $ABCD$. Постройте его образ:
 - а) при симметрии относительно прямой, проходящей через вершину C , параллельно диагонали AC ;
 - б) при симметрии относительно точки, являющейся серединой стороны BC ;
 - в) при параллельном переносе на вектор $\overline{BK}$, где $K \in BD$ и $BK : KD = 1 : 3$;
 - г) при повороте вокруг точки пересечения диагоналей на 120° по часовой стрелке.
2. Найдите уравнение кривой, из которой получена парабола $y = x^2 - 2x + 5$ параллельным переносом на вектор $\vec{a} \{-1; 1\}$.
- 3*. Даны угол и точка внутри него. С помощью циркуля и линейки постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на сторонах угла, а одна из сторон проходит через данную точку.

Домашнее задание

Дать индивидуальное задание нескольким учащимся: пользуясь дополнительной литературой, подготовить сообщение по предложенным темам: а) Развитие геометрии до нашей эры; б) Геометрия Лобачевского; в) Декарт и его вклад в развитие геометрии.

При подготовке сообщений можно рекомендовать учащимся использовать приложение 2 учебника и дополнительную литературу.

- Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989.
- Большая советская энциклопедия. Геометрия. – М.: Советская энциклопедия, 1971.
- Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1984.

Урок 61

Об аксиомах планиметрии

Цели урока:

- Ознакомить учащихся с системой аксиом, которые положены в основу изученного курса геометрии.
- Дать учащимся представление об основных этапах развития геометрии.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Изучение нового материала

1. Заслушать сообщения, подготовленные учащимися.

Задание классу: внимательно выслушать сообщения и сделать в тетрадях краткие записи, в которых должны быть отражены основные этапы развития геометрии, важнейшие открытия геометрии, выдающиеся ученые и их вклад в развитие науки.

2. Лекция «Об аксиомах планиметрии»

(Излагает учитель, см. приложение 1 учебника.)

III. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Повторить главу I «Начальные геометрические сведения», вопросы 1–21 (с. 25–26); главу III «Параллельные прямые», вопросы 1–15 (с. 68).

ПОВТОРЕНИЕ

При повторении курса геометрии необходимо сконцентрировать внимание на основных вопросах программы. Часы, предназначенные для повторения, можно распределить по темам следующим образом:

Урок 62 – Начальные геометрические сведения. Параллельные прямые.

Уроки 63–64 – Треугольники.

Урок 65 – Окружность.

Урок 66 – Четырехугольники. Многоугольники.

Урок 67 – Векторы, метод координат, движение.

Урок 68 – Итоговая контрольная работа (или итоговый тест, по усмотрению учителя).

Урок 62

Повторение по теме «Начальные геометрические сведения. Параллельные прямые»

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по теме урока.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Повторение теоретических сведений с помощью таблицы 3.

Учащимся раздаются на каждую парту таблицы 3 (см. приложение) и дается 2–3 минуты на повторение.

III. Теоретический тест с последующей самопроверкой

1. Если $a \perp c$, $b \perp c$, то

а) $a \parallel b$;

б) $a \perp b$;

в) $a \cap b$.

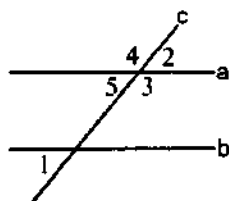


Рис 325

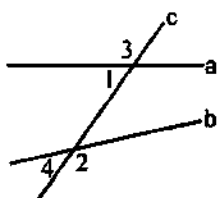


Рис 326

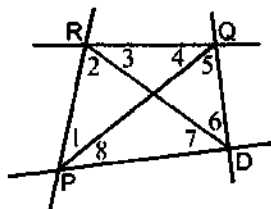


Рис 327

2. Если $a \parallel c$, $b \parallel c$, то
 - а) $a \perp b$;
 - б) $a \cap b$;
 - в) $a \parallel b$.
3. Рис. 325. Если $a \parallel b$, c – секущая, то
 - а) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$;
 - б) $\angle 5 = \angle 2$;
 - в) $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$.
4. Рис. 326. Для того чтобы прямые a и b были параллельными, нужно, чтобы
 - а) $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$;
 - б) $\angle 1 = \angle 2$;
 - в) $\angle 3 = \angle 2$.
5. Рис. 327. Для того чтобы прямые PR и QD были параллельными, нужно, чтобы
 - а) $\angle 2 = \angle 6$;
 - б) $\angle 8 = \angle 4$;
 - в) $\angle 3 = \angle 7$.
6. Один из углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равен 73° . Остальные углы равны:
 - а) 73° ;
 - б) 73° и 107° ;
 - в) 73° и 163° .
7. Если точка C лежит на отрезке AB , то:
 - а) $AB < AC + CB$;
 - б) $AB = AC + CB$;
 - в) $AB > AC + CB$.
8. Если луч OC проходит между сторонами угла AOB , то:
 - а) $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$;
 - б) $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$;
 - в) $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$.
9. Рис. 328. Прямые a , b и c пересекаются в точке O . $\angle 1$ равен:
 - а) 75° ;
 - б) 150° ;
 - в) 105° .

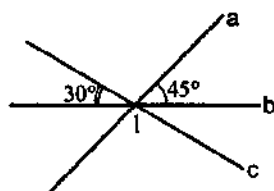


Рис. 328

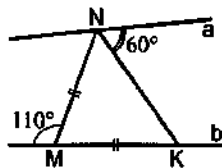


Рис. 329

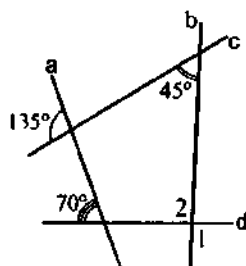


Рис. 330

10. При пересечении двух прямых образовались четыре угла. Разность двух из них равна 52° . Эти углы:

- смежные;
- вертикальные;
- накрест лежащие.

Ответы к тесту:

- | | |
|--------|---------|
| 1. а); | 2. в); |
| 3. в); | 4. в); |
| 5. а); | 6. б); |
| 7. б); | 8. а); |
| 9. в); | 10. а). |

IV. Решение задач на готовых чертежах

Учащиеся решают задачи самостоятельно, записывая краткое решение в тетрадах, затем идет обсуждение решений задач — один из учащихся выходит к доске и предлагает свое решение, остальные учащиеся или соглашаются с ним, или исправляют его ошибки, предлагают свое решение.

- Рис. 329. Параллельны ли прямые a и b ?
- Рис. 330. Найдите: $\angle 1$, $\angle 2$.
- Рис. 331. BD — биссектриса ABC .
Найдите: $\angle 1$.
- Рис. 332. $TK = KP$.
Найдите: $\angle 1$.
- Рис. 333. Найдите: $\angle 1$.

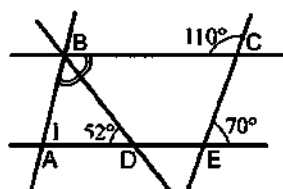


Рис. 331

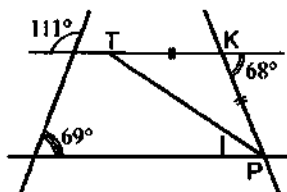


Рис. 332

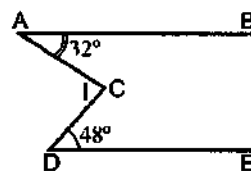


Рис. 333

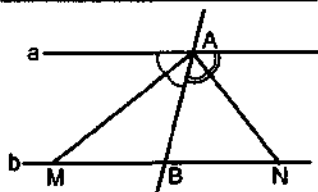


Рис 334

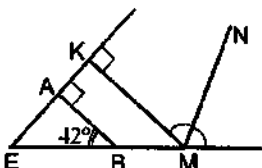


Рис 335

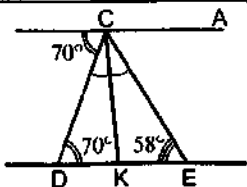


Рис 336

6. Рис. 334. $a \parallel b$, $AB = 4,2$ см.

Найти: MN .

7. Рис. 335. Найти: $\angle EMN$.

8. Рис. 336. Найти: $\angle ACK$.

9. Рис. 337. Дано: $AB = 7$ см, $AM^2 - MB^2 = 7$.

Найти: AM , MB .

10. Рис. 338. Дано: $\frac{1}{3} AK = \frac{1}{4} BK$; $AB = 14$ см.

Найти: AK , BK .

11. Рис. 339. Дано: $AB = 15,6$; $AD = 7,5$; $CB = 10,2$.

Найти: CD .

12. Рис. 340. Дано: $\angle BOC = 63^\circ$, $\angle AOD = 57^\circ$, $\angle AOB = 85^\circ$.

Найти: $\angle DOC$.

Ответы к задачам

1. нет;

3. $\angle 1 = 76^\circ$;

5. $\angle 1 = 80^\circ$;

7. $\angle EMN = 111^\circ$;

9. $AM = 4$ см, $MB = 3$ см;

11. $CD = 2,1$;

2. $\angle 1 = \angle 2 = 70^\circ$;

4. $\angle 1 = 34^\circ$;

6. $MN = 8,4$ см;

8. $\angle ACK = 84^\circ$;

10. $AK = 6$ см, $BK = 8$ см;

12. $\angle DOC = 35^\circ$.

V. Самостоятельное решение задач

1. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки D , E , F соответственно так, что $\angle BDE = \angle BAC = 34^\circ$, $\angle DEF = 52^\circ$.

а) Найдите угол EFC .

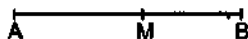


Рис 337



Рис 338

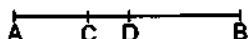


Рис 339

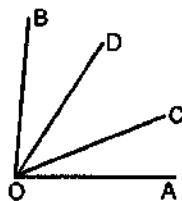


Рис 340

б) Пересекаются ли прямые AB и FE ? Если да, то найдите угол между ними.

(Ответ: а) $\angle EFC = 52^\circ$; б) да; $\angle(AB, FE) = 18^\circ$.)

2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K . На стороне AB отмечена точка N так, что $AN = NK$. Найдите углы треугольника ANK , если известно, что $\angle ABC = 40^\circ$, а разность углов BAC и ACB равна 20° .

(Ответ: $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$.)

3. Через точку K , лежащую на стороне AB треугольника ABC , параллельно биссектрисе угла A проведена прямая. Эта прямая пересекает продолжение стороны AC за точку A в точке M . Докажите, что $MA = AK$.

4. Через точку A прямой b , параллельной прямой l , проведены прямые AB и AC , пересекающие прямую l в точках B и C так, что угол между прямыми AB и b равен 60° , а угол между прямыми AC и b равен 40° . Определите углы треугольника ABC .

(Ответ: $60^\circ, 40^\circ, 80^\circ$.)

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Повторить главы II, IV, VII, XI (теорию без доказательств).

Урок 63 Треугольники

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по теме урока.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Повторение теории по таблицам 1, 2, 5, 6 (см. Приложение).

Учащимся раздаются таблицы и дается 5 минут на повторение.

III. Математический диктант с последующей самопроверкой

(Ответы указаны в скобках.)

1. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна ... (половине гипотенузы)
2. В треугольнике против большей стороны лежит ... (больший угол)
3. Каждая сторона треугольника ... суммы двух других его сторон. (меньше)
4. Существуют следующие признаки равенства прямоугольных треугольников: ... (по двум катетам, по катету и прилежа-

щему к нему острому углу, по гипотенузе и острому углу, по гипотенузе и катету)

5. Площадь произвольного треугольника вычисляется по формуле ... ($S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$; $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$S = rp$; $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c – стороны треугольника, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, p – полупериметр.)

6. Медианы треугольника делят треугольник ... (на 6 равновеликих треугольников)
 7. По теореме, обратной теореме Пифагора, ... (если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный.)
 8. Рис. 341. Если в $\triangle MNK$ $\angle N = 90^\circ$, NP – его высота, то:

$$NP = \dots (\sqrt{MP \cdot PK})$$

$$MN = \dots (\sqrt{MP \cdot MK})$$

$$NK = \dots (\sqrt{PK \cdot MK}).$$

9. Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении ... (2 : 1, считая от вершины.)

10. Рис. 342. Если в $\triangle ABC$ BD – биссектриса, то:

$$\frac{AB}{BC} = \dots \left(\frac{AD}{DC} \right);$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \dots \left(\frac{AD}{DC} \right).$$

11. По теореме косинусов в треугольнике MNK $MN^2 = \dots$
 $(MK^2 + NK^2 - 2MK \cdot NK \cos \angle MKN)$

12. По теореме синусов в $\triangle EST$... $\left(\frac{ES}{\sin \angle T} = \frac{ST}{\sin \angle E} = \frac{ET}{\sin \angle S} \right)$

IV. Решение задач на готовых чертежах

Количество задач определяется в зависимости от подготовленности класса.

1. Рис. 343. Найдите: $\angle ACE$.
2. Рис. 344. Найдите: MK .
3. Рис. 345. Найдите: AB .

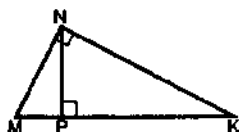


Рис. 341

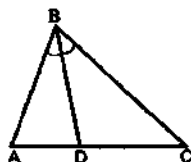


Рис. 342

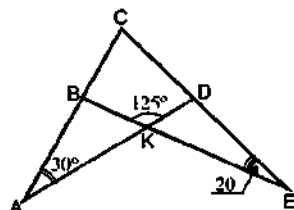


Рис. 343

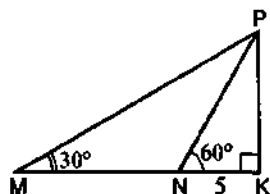


Рис 344

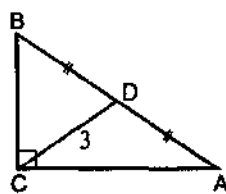


Рис 345

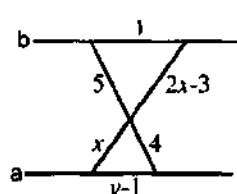


Рис 346

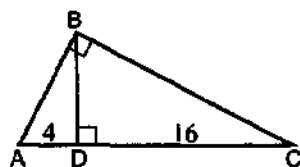


Рис 347

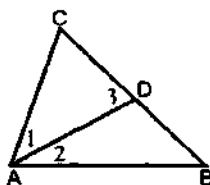


Рис 348

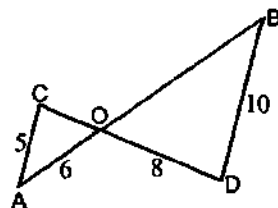


Рис 349

4. Рис. 346. Дано: $a \parallel b$. Найдите: x ; y .
5. Рис. 347. Найдите: BD .
6. Рис. 348. Дано: $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $CD = 4$, $BC = 9$.
Найдите: AC .
7. Рис. 349. Дано: $AC \parallel BD$. Найдите: CO , BO .
8. Рис. 350. Дано: $CE \parallel BF \parallel AK$, $CE + BF + AK = 21$.
Найдите: CE , BF , AK .
9. Рис. 351. Найдите: $S_{ABC} : S_{ACD}$.
10. Рис. 352. Дано: $KM_1 = M_1P$, $AB \parallel MP$, $AB = 18$.
Найдите: MP .

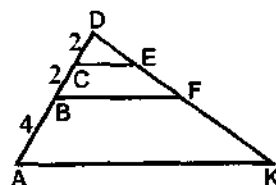


Рис 350

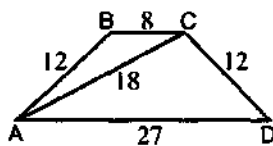


Рис 351

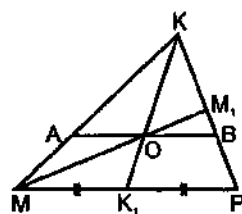


Рис 352

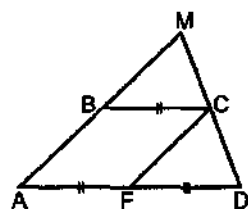


Рис 353

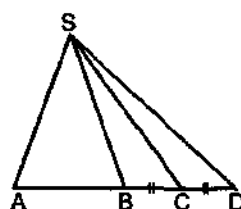


Рис 354

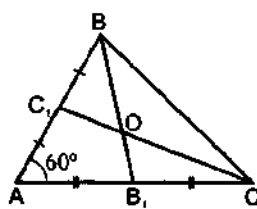


Рис 355

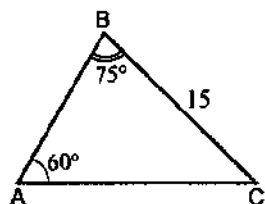


Рис. 356

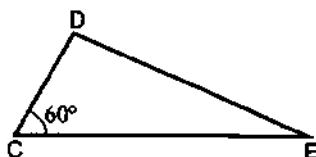


Рис. 357

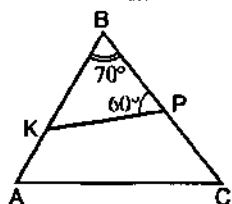


Рис. 358

11. Рис. 353. Дано: $ABCD$ – трапеция,

$AM = 10$ см. Найдите: CF .

12. Рис. 354. $S_{ASD} = 16$, $AB = BD$.

Найдите: S_{BCS} .

13. Рис. 355. $AB = 10$, $AC = 14$.

Найдите: S_{BOC} .

14. Рис. 356. Найдите: AB .

15. Рис. 357. DE в 2,5 раза больше CD .

Найдите: $\frac{CE}{CD}$.

16. Рис. 358. Дано: $AB \cdot BK = CB \cdot BP$.

Найдите: $\angle A$, $\angle C$.

17. Рис. 359. Дано: $MK = 8$.

Найдите: PK .

18. Рис. 360. Найдите: OC .

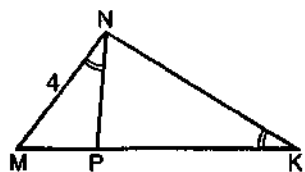


Рис. 359

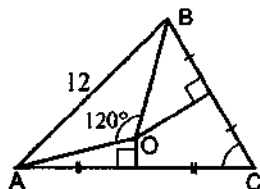


Рис. 360

Ответы к задачам

1. $\angle ACE = 75^\circ$;

3. $AB = 6$;

5. $BD = 8$;

7. $CO = 4$, $BO = 12$;

9. $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{4}{9}$;

11. $CF = 5$;

13. $S_{BOC} = \frac{35\sqrt{3}}{3}$;

15. $\frac{CE}{CD} = \frac{1+\sqrt{22}}{2}$;

17. $PK = 6$;

2. $MK = 15$;

4. $x = 4$; $y = 5$;

6. $AC = 6$;

8. $CE = 3$, $BF = 6$, $AK = 12$;

10. $MP = 27$;

12. $S_{BCS} = 4$;

14. $AB = 5\sqrt{6}$;

16. $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 50^\circ$;

18. $OC = 4\sqrt{3}$

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить работу П-1 (I вариант) из сборника: «Зив Б. Г. Дидактические материалы по геометрии. 9 кл. – М.: Просвещение, 1993».

Урок 64

Треугольники

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач по теме «Треугольники».

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний. Проверка домашнего задания

(В случае, если учащиеся самостоятельно не справились с решением задачи, учитель задает наводящие вопросы.)

Рис. 361.

Задача 1

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$,
 $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

Доказать: $\triangle ADE = \triangle CED$.

Решение: Т. к. $DF \parallel AC$, то $AD = EC$. Т. к.
 $AB = BC$, то $\angle ADE = \angle DEC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CED$ по двум сторонам и углу
 между ними.

- На какие фигуры разбивает $\triangle ABC$ прямая DE , параллельная AC ?
- Определите вид четырехугольника $ADEC$.
- Укажите равные элементы в треугольниках ADE и CED .

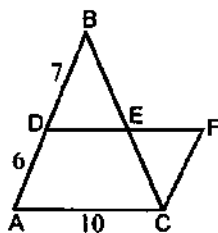


Рис. 361

Задача 2

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

Доказать: $\triangle ECF \sim \triangle ABC$.

Решение: Т. к. $CF \parallel AB$, то $\angle ECF = \angle ABC$. Т. к. $DE \parallel AC$, то $\angle FEC = \angle ECA \Rightarrow \triangle ECF \sim \triangle ABC$ по второму признаку подобия треугольников.

- Что вы можете сказать о сторонах EF и AC треугольников ECF и ABC ? А о сторонах AB и FC ?
- Укажите в данных треугольниках равные углы.

Задача 3

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

Найти: EF .

Решение: $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ с коэффициентом подобия $k = \frac{AB}{DB} = \frac{13}{7}$,

$$\text{тогда } DE = \frac{7}{13} AC = \frac{70}{13}.$$

$ADFC$ – параллелограмм, т. к. противолежащие стороны параллельны. Таким образом, $AC = DF$.

$$\text{Тогда } EF = DF - DE = AC - DE = 10 - \frac{70}{13} = \frac{60}{13}.$$

Ответ: $\frac{60}{13}$.

- Что вы можете сказать о четырехугольнике $ADFC$?
- Найдите стороны $\triangle DBE$.
- Как найти EF , если $DF = 10$, $DE = \frac{70}{13}$.

Задача 4

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

Найти: высоту $\triangle ABC$, опущенную на боковую сторону.

Решение: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+13+10}{2} = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{AB} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot AB} = \frac{60}{\frac{1}{2} \cdot 13} = \frac{120}{13}.$$

Ответ: $\frac{120}{13}$.

- Какая связь существует между боковой стороной и высотой, проведенной к ней?
- Чему равна площадь $\triangle ABC$? Какая формула позволяет вычислить площадь треугольника по трем его известным сторонам?
- Как, зная площадь треугольника и его сторону, можно вычислить высоту, проведенную к этой стороне?

Задача 5

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $DF \parallel AC$, $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

Найти: $\frac{S_{ADF}}{S_{DCF}}$.

Решение: $\frac{S_{ADF}}{S_{DCF}} = \frac{S_{CDF}}{S_{DCF}} = \frac{DE}{DF} = \frac{70}{13} : 10 = \frac{7}{13}$.

Ответ: $\frac{7}{13}$.

- Что вы можете сказать о высотах треугольников ADE и DCF ?
- Чему равно отношение площадей двух треугольников, высоты которых равны?

III. Самостоятельное решение задач

I вариант – работа П–1 (вариант 2)

II вариант – работа П–1 (вариант 3)

(см. Дидактические материалы по геометрии для 9 класса.)

Дополнительные задачи

Дополнительные задачи можно предложить более подготовленным учащимся вместо работы П–I.

1. Площадь треугольника ABC равна 30 см^2 . На стороне AC взята точка D так, что $AD : DC = 2 : 3$. Длина перпендикуляра DE , проведенного к стороне BC , равна 9 см. Найти BC .

(Ответ: $BC = 4$ см.)

2. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла; отрезок, соединяющий ее основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найти углы треугольника.

(Ответ: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.)

3. Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC , если $BC = 8$ см, а длины высот, проведенных к AC и BC , равны соответственно 6, 4 и 4 см.

(Ответ: $\sqrt{41}$ см, 5 см.)

4. В треугольнике длины двух сторон составляют 6 и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей стороне.

(Ответ: 4 см.)

5. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, если длина высоты, проведенной к боковой стороне, равна 12 см, а длина основания равна 15 см.

(Ответ: 75 см^2 .)

IV. Подведение итогов урока**Домашнее задание**

Повторить главы VIII, XII, математический диктант МД–2 (вариант 1, задания 1–5) из дидактических материалов по геометрии для 9 класса.

Урок 65 Окружность

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по теме урока.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока**I. Организационный момент****II. Актуализация знаний учащихся**

Повторение теоретического материала в процессе решения задач на готовых чертежах. При решении задач разрешается пользоваться таблицей № 7, которая раздается на каждую парту. Задачи решаются

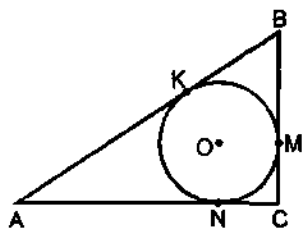


Рис 362

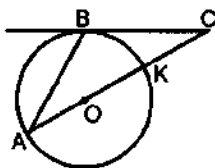


Рис 363

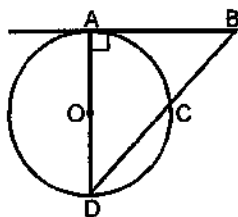


Рис 364

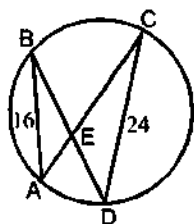


Рис 365

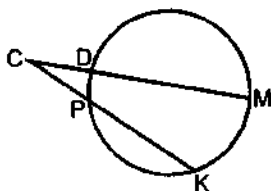


Рис 366

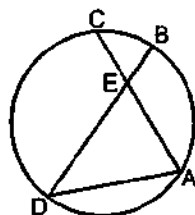


Рис 367

самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением тех из них, с которыми не справились большинство учащихся.

III. Задачи на готовых чертежах

1. Рис. 362. Дано: $R = 3$ см, $AB = 15$ см.
Найти: AK , KB .
2. Рис. 363. Дано: B – точка касания, $\angle BKC = 58^\circ$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
3. Рис. 364. Дано: $AB = 15$.
Найти: DC , BC .
4. Рис. 365. Дано: $PAE = 28$.
Найти: PDE .
5. Рис. 366. Дано: $CK = 16$, $CP = 6$, $CM = 24$.
Найти: DM .
6. Рис. 367. Дано: $\angle CED$ в 9 раз больше $\angle BEC$, $\angle DAE$ на 61° больше $\angle BEC$. Найти: $\angle CBE$.
7. Рис. 368. Найти: $\angle MNK$.

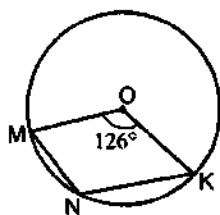


Рис 368

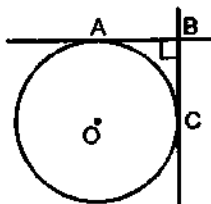


Рис 369

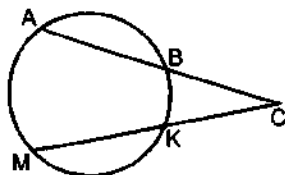


Рис 370

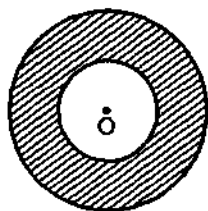


Рис 371

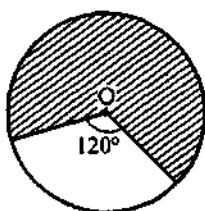


Рис 372

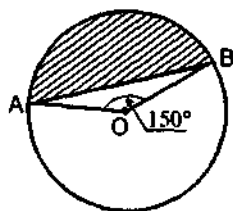


Рис 373

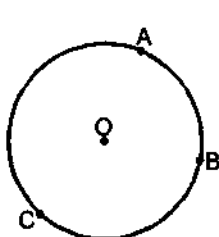


Рис 374

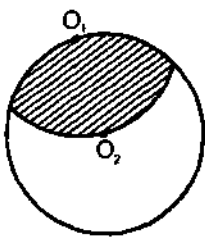


Рис 375

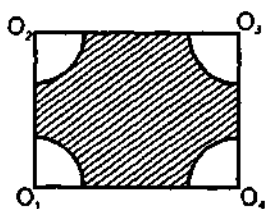


Рис 376

8. Рис. 369. Дано: AB, BC – касательные, $R = 11$.
Найти: $P_{\text{досв.}}$.
9. Рис. 370. Дано: $\angle BKC = 40^\circ$, $\angle AM = 100^\circ$.
Найти: $\angle ABM, \angle BMK, \angle ACM$.
10. Рис. 371. $R_1 = 10$; $R_2 = 5$.
Найти: S кольца.
11. Рис. 372. $R = 12$.
Найти: S заштрихованной фигуры.
12. Рис. 373. $R = 6$.
Найти: S заштрихованной фигуры.
13. Рис. 374. $\angle AOB : \angle BOC : \angle AOC = 2 : 3 : 4$, $R = 9$.
Найти длину дуги BC .
14. Рис. 375. $R_1 = R_2 = 5$.
Найти периметр заштрихованной фигуры.
15. Рис. 376. $O_1O_2 = 15$, $O_2O_3 = 20$. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4$.
Найти: периметр заштрихованной фигуры.

Ответы к задачам

1. 6 см, 9 см;
2. $\angle A = 29^\circ$, $\angle B = 119^\circ$, $\angle C = 32^\circ$;
3. $BC = 9$, $CD = 16$;
4. $P_{\text{DEC}} = 42$ см;
5. $DM = 20$;
6. $\angle CBE = 79^\circ$;
7. $\angle MNK = 117^\circ$;
8. $BC = 11\sqrt{2}$;
9. $\angle ABM = 50^\circ$, $\angle BMK = 20^\circ$, $\angle ACM = 30^\circ$;
10. 75π ;
11. 96π ;

12. $15\pi - 9$;

13. 6π ;

14. $\frac{20\pi}{3}$;

15. $38 - 8\pi$.

IV. Самостоятельное решение задач на уроке и дома

(Количество задач определяется в зависимости от подготовленности класса и каждого ученика.)

1. В треугольник вписана окружность так, что три из шести полученных отрезков касательных равны 3 см, 4 см, 5 см. Определите вид треугольника.
2. Точки A и B делят окружность с центром O на дуги AMB и ACB так, что дуга ACB на 60° меньше дуги AMB . AM – диаметр окружности. Найдите углы AMB , ABM , ACB .
3. Хорды AB и CD пересекаются в точке E так, что $AE = 3$ см, $BE = 36$ см, $CE : DE = 3 : 4$. Найдите CD и наименьшее значение радиуса этой окружности.
4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а биссектриса, проведенная к основанию – 8 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.
5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, и радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 20 см, 26 см и 26 см.
6. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.
7. Точка M лежит на хорде AB так, что $AM : BM = 4 : 3$, $AB = 14$ см. Расстояние от центра окружности до точки M равно 4 см. Найдите радиус окружности.
8. Точка O равноудалена от сторон треугольника ABC , $\angle ACO = 34^\circ$. Найдите $\angle AOB$.

Ответы к задачам

1. прямоугольный;
2. $\angle AMB = 75^\circ$, $\angle ABM = 90^\circ$, $\angle ACB = 105^\circ$;
3. 19,5 см;
4. $r = 3$ см, $R = 6,25$ см;
5. $r = 6\frac{2}{3}$ см, $R = 14\frac{1}{12}$ см;
6. $94,08$ см²;
7. 8 см;
8. 124° .

Урок 66

Четырехугольники. Многоугольники

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по теме урока.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Повторить теорию, используя таблицы 4, 5, 7 (вписанная и описанная около четырехугольника окружности) и 9 (см. Приложения). Учащиеся самостоятельно работают в течение 5–7 минут с указанными таблицами, которые в распечатанном виде раздаются на каждую парту.

III. Теоретический тест с последующей самопроверкой

Самопроверка проводится следующим образом: учитель читает задание и просит одного из учащихся назвать правильный ответ, затем идет обсуждение правильности названного ответа, при этом снова можно использовать таблицы.

I вариант

1. Любой прямоугольник является:
 - а) ромбом;
 - б) квадратом;
 - в) параллелограммом.
2. Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник:
 - а) ромб;
 - б) параллелограмм;
 - в) прямоугольник.
3. Ромб – это четырехугольник, в котором:
 - а) диагонали взаимно перпендикулярны, а противоположные стороны параллельны и равны;
 - б) диагонали взаимно перпендикулярны и равны;
 - в) противоположные углы равны, а противоположные стороны параллельны.
4. Если четырехугольник вписан в окружность, то:
 - а) суммы его противоположных сторон равны;
 - б) сумма противоположных углов равна 180° ;
 - в) суммы противоположных сторон и углов равны.
5. В равнобедренной трапеции:
 - а) диагонали точкой пересечения делятся пополам;
 - б) диагонали являются биссектрисами ее углов;
 - в) диагонали равны.

6. Если $ABCD$ – ромб, то его площадь можно вычислить по формуле:
- а) $S = \frac{1}{2} AB \cdot AD$;
 - б) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$;
 - в) $S = AC \cdot BD$.
7. Радиус описанной около правильного n -угольника окружности вычисляется по формуле:
- а) $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$;
 - б) $R = 2a_n \sin \frac{180^\circ}{n}$;
 - в) $R = a_n \sin \frac{360^\circ}{n}$.
8. Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна:
- а) 360° ;
 - б) $180^\circ \cdot (n - 2)$;
 - в) $180^\circ \cdot n$.
9. Площадь правильного многоугольника вычисляется по формуле:
- а) $S = Pr$;
 - б) $S = PR$;
 - в) $S = R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$.

II вариант

1. Любой ромб является:
- а) параллелограммом;
 - б) квадратом;
 - в) прямоугольником.
2. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм:
- а) квадрат;
 - б) прямоугольник;
 - в) ромб.
3. Прямоугольник – это четырехугольник, в котором:
- а) диагонали точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов;
 - б) противоположные стороны параллельны, а диагонали равны;
 - в) два угла прямые и две его стороны равны.
4. Если четырехугольник описан около окружности, то:
- а) суммы его противоположных сторон равны;

- б) сумма противоположных углов равна 180° ;
в) суммы противоположных сторон и углов равны.
5. Средней линией трапеции является отрезок:
а) параллельный основаниям и равный полусумме двух ее сторон;
б) соединяющий две точки на боковых сторонах;
в) соединяющий вершины боковых сторон.
6. Если $ABCD$ – квадрат, то его площадь можно вычислить по формуле:
а) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$;
б) $S = \frac{1}{2} AB \cdot AD$;
в) $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B$.
7. Радиус вписанной в правильный n -угольник окружности вычисляется по формуле:
а) $r = 2a_n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$;
б) $r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$;
в) $r = a_n \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n}$.
8. Внешний угол правильного n -угольника равен:
а) $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$;
б) $\frac{360^\circ}{n-2}$;
в) $\frac{360^\circ}{n}$.
9. Формула, выражающая зависимость между радиусом вписанной и описанной около правильного n -угольника окружности, выглядит так:
а) $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$;
б) $r = \frac{R}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$;
в) $r = R \cos \frac{360^\circ}{n}$.

Ответы к тесту

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I вариант	в	б	а	б	в	б	а	б	в
II вариант	а	в	б	а	в	а	б	в	а

III. Решение задач

Учащиеся работают самостоятельно, учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся, оказывая им при этом необходимую помощь. В конце урока проверить задание по готовым ответам, обсудить те задачи, с которыми не справились большинство учащихся.

Количество как задач на готовых чертежах, так и текстовых, достаточно для организации работы в классе и дома. Поэтому те задачи, которые учащиеся не успели решить на уроке, можно предложить решить дома.

Задачи на готовых чертежах

1. Рис. 377. Дано: $ABCD$ – ромб.
Найти: MN .
2. Рис. 378. Дано: $ABCD$ – параллелограмм.
Найти: $\angle CBK$.
3. Рис. 379. Дано: $ABCD$ – ромб.
Найти: AC .
4. Рис. 380. Дано: $ABCD$ – ромб. BE – биссектриса $\angle ABD$.
Найти: $\angle BCD$.

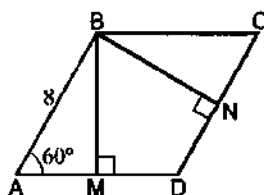


Рис 377

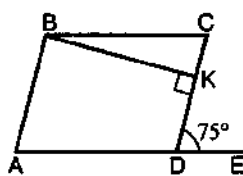


Рис 378

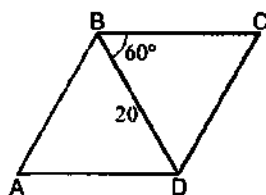


Рис 379

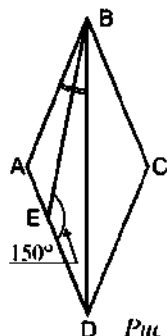


Рис 380

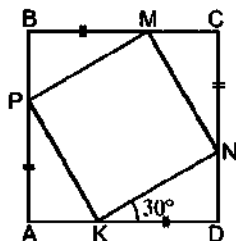


Рис 381

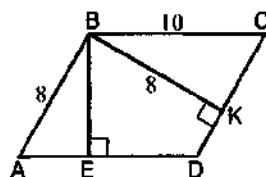


Рис 382

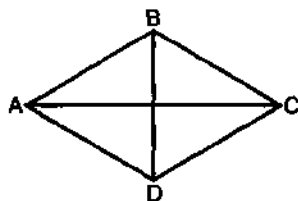


Рис 383

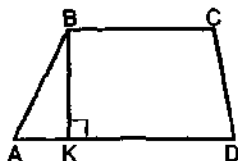


Рис 384

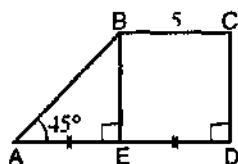


Рис 385

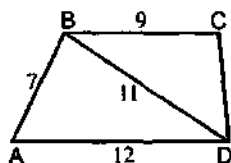


Рис 386

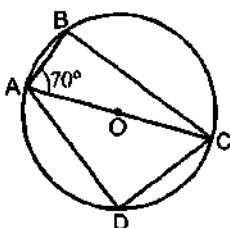


Рис 387

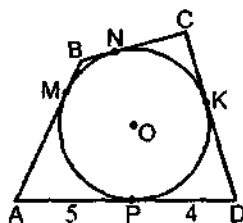


Рис 388

5. Рис. 381. Дано: $ABCD$ – квадрат. $P_{ABCD} = 8$.
Найти: P_{MNKP} .
6. Рис. 382. Дано: $ABCD$ – параллелограмм.
Найти: BE .
7. Рис. 383. Дано: $AC = 12$; $S_{ABCD} = 48$.
Найти: BD .
8. Рис. 384. Дано: $ABCD$ – трапеция.
 $BC : AD = 2 : 3$, $BK = 6$, $S_{ABCD} = 60$.
Найти: BC , AD .
9. Рис. 385. Дано: $ABCD$ – трапеция.
Найти: S_{ABCD} .
10. Рис. 386. Дано: $ABCD$ – трапеция.
Найти: S_{ABCD} .
11. Рис. 387. Дано: $\angle AOD = 80^\circ$.
Найти: углы четырехугольника $ABCD$.
12. Рис. 388. M, N, K, P – точки касания, $BC = 5$.
Найти: $AB + CD$.

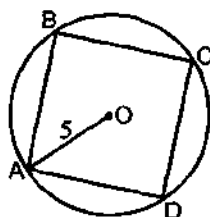


Рис 389

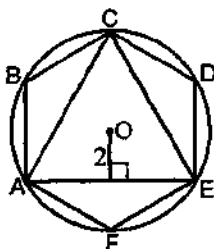


Рис 390

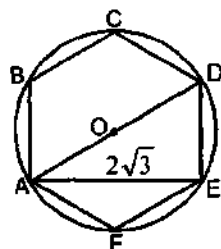


Рис 391

13. Рис. 389. $ABCD$ – правильный.

Найти: AD , r .

14. Рис. 390. $ABCDEF$ – правильный.

Найти: AB , AC .

15. Рис. 391. $ABCD$ – правильный.

Найти: R , S_{ABCDEF} .

Ответы к задачам на готовых чертежах:

- | | |
|---|--|
| 1. $MN = 4\sqrt{3}$; | 2. $\angle CBE = 15^\circ$; |
| 3. $AC = 20\sqrt{3}$; | 4. $\angle BCD = 140^\circ$; |
| 5. $P_{MNKP} = (\sqrt{3} - 1) \cdot 8$; | 6. $BE = 6,4$; |
| 7. $BD = 8$; | 8. $BC = 8$, $AD = 12$; |
| 9. $S = 37,5$; | 10. $S_{ABCD} = 21\sqrt{10}$; |
| 11. $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$; | |
| 12. $AB + CD = 14$; | 13. $AD = 5\sqrt{2}$; $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$; |
| 14. $AB = 4$, $AC = 4\sqrt{3}$; | 15. $R = 2$; $S_{ABCDEF} = 6\sqrt{3}$. |

Более подготовленным учащимся можно предложить для решения текстовые задачи.

Текстовые задачи

- В равнобокой трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.
- В параллелограмме $KMNP$ угол M равен 120° , $KM = 8$, $KP = 10$. Найдите расстояния от вершин M и P до биссектрисы угла MKP .
- Высота ромба делит его сторону пополам. Найдите углы ромба.
- Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка N так, что треугольник BNC равносторонний. Найдите угол NAD .
- В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке F и продолжение стороны CD за точку C – в точке E . Найдите периметр параллелограмма, если $BF = 2$ см, $EC = 3$ см.
- В трапеции $ABCD$ AD – большее основание, CK – высота, $AB = 5$ см. На отрезке AK взята точка E так, что $AE = 3$ см, $EK = 6$ см, $KD = 1$ см, $BE = 4$ см. Найдите площадь трапеции.
- В треугольнике ABC угол A тупой, BK и CD – высоты, $BK = 12$ см, $AK = 9$ см, $CD = 10$ см. Найдите AD .
- В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60^\circ$, диагональ BD перпендикулярна стороне AB . Прямая, проходящая через середину отрезка BD – точку M , параллельно AD , пересекает сторону AB в точке K , $MK = 4$ см. Найдите площадь треугольника AMD .
- В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников ABD и ACD равны, а

площади треугольников ACD и BCD не равны. Докажите, что данный четырехугольник является трапецией.

10. Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Радиус большей окружности равен $4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус меньшей окружности.
11. Периметр правильного четырехугольника, вписанного в окружность, на $16(\sqrt{2} - 1)$ см меньше периметра правильного четырехугольника, описанного около этой же окружности. Найдите радиус окружности.

Ответы к текстовым задачам

- | | |
|---|------------------------------|
| 1. $60^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 60^\circ$. | 2. 4; 5. |
| 3. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$. | 4. $\angle NAD = 15^\circ$. |
| 5. $P = 14$ см. | 6. 32 см^2 |
| 7. 7,5 см | 8. $4\sqrt{3} \text{ см}^2$ |
| 10. $2\sqrt{3}$ см | 11. $2\sqrt{2}$ см |

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Повторить главы IX, X, XIII, продолжить работу по решению задач.

Урок 67

Векторы. Метод координат. Движения

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по теме урока.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Повторение теории по таблицам 8, 10 (см. Приложение).

Учащиеся в течение 5–7 минут самостоятельно повторяют теорию, используя таблицы 8, 10, которые выдаются на каждую парту.

III. Решение простейших задач на применение теории

(Фронтальная работа с классом.)

1. Рис. 392.

Дано: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \overline{AA}, \overline{BB}$. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{e}| = 5$; $|\vec{c}| = 7$; $|\vec{d}| = 3$.

Укажите:

- а) коллинеарные векторы;
- б) сонаправленные векторы;
- в) противоположно направленные векторы;
- г) равные векторы;
- д) нулевые векторы.

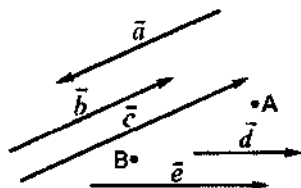


Рис 392

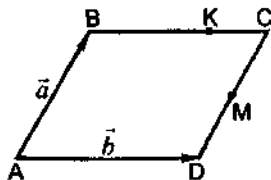


Рис 393

Найдите: длины векторов $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{d} + \vec{e}$.

Постройте векторы:

- $\vec{b} + \vec{d}$ правилом треугольника;
- $\vec{a} + \vec{e}$ правилом параллелограмма;
- $\vec{c} - \vec{d}$;
- $2\vec{e}$; $\frac{1}{3}\vec{c}$; $-3\vec{d}$; $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

2. Рис. 393.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм. $K \in BC$, $BK : KC = 2 : 1$, M – середина CD .

Разложите векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

3. Дано: $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$, $C(-1; -3)$.

Найдите:

- координаты вектора $\overrightarrow{AB}$;
- длину вектора $\overrightarrow{BC}$;
- координаты середины отрезка AC ;
- расстояние между точками A и B .

4. Дано: $\vec{a} \{3; -4\}$, $\vec{b} \{-2; 4\}$.

Найдите:

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;
- $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$;
- $\vec{m} = 3\vec{a}$;
- $\vec{n} = -\frac{1}{2}\vec{b}$;
- найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны $\vec{a} \{2; -5\}$ и $\vec{b} \{-10; y\}$.

При каком значении векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

6. Дан треугольник ABC . Постройте его образ:

- при осевой симметрии относительно прямой AB ;
- при центральной симметрии относительно точки C ;
- при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$, где M – середина стороны BC ;
- при повороте вокруг точки A на 45° по часовой стрелке.

IV. Самостоятельное решение задач

1. $ABCD$ и $ADEF$ – параллелограммы, имеющие общую сторону. Постройте вектор $\vec{x}$ такой, что:
 - а) $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CD} + \vec{AF} + \vec{x} = \vec{DE}$;
 - б) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{AF} - \vec{DA} + \vec{x} = \vec{AF} + \vec{BC}$.
2. На стороне CD и диагонали AC – параллелограмма $ABCD$ лежат точки P и E так, что $DP : PC = 3 : 2$, $AE : EC = 4 : 3$. Выразите вектор $\vec{EP}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$.
3. В треугольнике MNK O – точка пересечения медиан, $\vec{MN} = \vec{x}$, $\vec{MK} = \vec{y}$, $\vec{MO} = k \cdot (\vec{x} + \vec{y})$. Найдите число k .
4. На окружности с центром O постройте такие точки, что:
 - а) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0}$;
 - б) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$;
 - в) $|\vec{OB} - \vec{OA}| = |\vec{OC}|$.
5. Докажите, что если для четырехугольника $ABCD$ и произвольной точки O выполняется равенство $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}$, то этот четырехугольник – параллелограмм.
6. Докажите, что четырехугольник $MNKP$, заданный координатами своих вершин $M(2; 2)$, $N(5; 3)$, $K(6; 6)$, $P(3; 5)$, является ромбом и вычислите его площадь.
7. Найдите координаты точки N , лежащей на оси абсцисс и равноудаленной от точек $P(-1; 3)$ и $K(0; 2)$.
8. В равнобедренном треугольнике основание равно 12 см, а высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.
9. Определите значение x , при котором вектор $\vec{a} \{2 - x; 2x + 3\}$ и вектор $\vec{b} \{-2; 5\}$:
 - а) коллинеарны;
 - б) перпендикулярны.
10. Используя метод координат, решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-9)^2 + (y-8)^2 = 64 \end{cases}$$
11. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD = 5$, $BC = CD = 3\sqrt{2}$, $AC = 7$. Используя метод координат, найдите расстояние между серединами противоположных сторон четырехугольника.

Ответы к текстовым задачам

1. а) $\vec{x} = \vec{DA}$; б) $\vec{x} = \vec{0}$;
2. $\vec{EP} = \frac{1}{35}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$;

3. $k = \frac{1}{3}$;
4. а) AB – диаметр;
б) $\angle(\overline{OA}, \overline{OB}) = 120^\circ$, OC – биссектриса $\angle OAB$;
в) $\angle OAB = 60^\circ$, C – любая точка окружности;
6. $S = 8$;
7. $N(-3; 0)$;
8. $\sqrt{97}$;
9. а) $x = 16$; б) $x = -\frac{11}{12}$;
10. $(2,6; 3,2)$;
11. $\frac{\sqrt{85}}{2}$.

V. Итоги урока

Домашнее задание

Подготовиться к итоговой контрольной работе.

Урок 68

Итоговая контрольная работа

Итоговую контрольную работу лучше провести в виде теста. Преимущество тестовой работы заключается в том, что за определенный промежуток времени ученик успевает прорешать большее количество задач за счет экономии времени, отведенного на оформление решений задач, тем самым учитель может включить большее количество тем в работу. Кроме того, важное значение имеет тот факт, что тест позволяет в кратчайшие сроки проверить работы учащихся, а самим учащимся сразу же в конце урока проверить свои работы по готовым ответам, которые учитель может вывесить в кабинете после того, как работы будут уже сданы на проверку.

Предлагаемые тесты составлены в двух примерно одинаковых по уровню сложности вариантах. Количество задач для одного часа работы явно избыточно, поэтому учителю по возможности необходимо или увеличить отведенное для работы время, или уменьшить число предлагаемых заданий в зависимости от уровня подготовленности класса.

Все тесты состоят из двух частей. Каждая часть включает пять задач. При выполнении заданий первой части учащимся нужно выбрать один из четырех предложенных ответов. При выполнении заданий второй части учащиеся в бланке ответов должны указать число, являющееся ответом данной задачи.

I вариант

Часть I

1. Какое утверждение относительно треугольника со сторонами 5, 9, 15 верно?
а) треугольник остроугольный;
б) треугольник тупоугольный;
в) треугольник прямоугольный;
г) такого треугольника не существует.
2. Если одна из сторон треугольника на 3 см меньше другой, высота делит третью сторону на отрезки 5 см и 10 см, то периметр треугольника равен:
а) 25 см; б) 40 см;
в) 32 см; г) 20 см.
3. Если один из углов ромба равен 60° , а диагональ, проведенная из вершины этого угла, равна $4\sqrt{3}$ см, то периметр ромба равен:
а) 16 см; б) 8 см;
в) 12 см; г) 24 см.
4. Величина одного из углов треугольника равна 20° . Найдите величину острого угла между биссектрисами двух других углов треугольника.
а) 84° ; б) 92° ;
в) 80° ; г) 87° .
5. В треугольнике ABC сторона $a = 7$, сторона $b = 8$, сторона $c = 5$. Вычислите угол $\angle A$.
а) 120° ; б) 45° ;
в) 30° ; г) 60° .

Часть II

1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания со вписанной окружностью в отношении 8 : 5, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.
2. В треугольнике BCE $\angle C = 60^\circ$, $CE : BC = 3 : 1$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите KE , если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.
3. Найдите площадь треугольника KMP , если сторона KP равна 5, медиана PO равна $3\sqrt{2}$, $\angle KOP = 135^\circ$.
4. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

5. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , касается катетов AC и BC соответственно в точках E и D . Найдите величину угла ABC (в градусах), если известно, что $AE = 1$, $BD = 3$.

II вариант

Часть I

1. Какое утверждение верно относительно треугольника со сторонами 15, 9, 12?
а) треугольник остроугольный;
б) треугольник тупоугольный;
в) треугольник прямоугольный;
г) такого треугольника не существует.
2. Если сходственные стороны подобных треугольников равны 2 см и 5 см, площадь первого треугольника равна 8 см^2 , то площадь второго треугольника равна:
а) 50 см^2 ; б) 40 см^2 ;
в) 60 см^2 ; г) 20 см^2 .
3. Если в равнобедренном треугольнике длина основания равна 12 см, а его периметр равен 32 см, то радиус окружности, вписанной в треугольник, равен:
а) 4 см; б) 3 см;
в) 6 см; г) 5 см.
4. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найдите катеты треугольника.
а) 12 см и 16 см; б) 7 см и 11 см;
в) 10 см и 13 см; г) 8 см и 15 см.
5. Стороны прямоугольника равны a и k . Найдите радиус окружности, описанной около этого прямоугольника.
а) $\frac{a^2}{k}$; б) $\frac{k^2}{a}$;
в) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + k^2}$; г) $\sqrt{a^2 + k^2}$.

Часть II

1. Окружность с центром O , вписанная в равнобедренный треугольник ABC с основанием AC , касается стороны BC в точке K , причем $CK : BK = 5 : 8$. Найдите площадь треугольника, если его периметр равен 72.
2. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K . Найдите сторону AC , если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

3. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30° , а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.
4. Пусть M – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором стороны AB , AD и BC равны между собой. Найдите угол CMD (в градусах), если известно, что $DM = MC$, а угол CAB не равен углу DBA .
5. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D . Найдите квадрат расстояния от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол ABC равен 120° .

Ответы к тесту

	Часть I					Часть II				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
<i>I вар.</i>	г	б	а	в	г	30	18	3	25	30
<i>II вар.</i>	в	а	б	г	в	240	15	24	120	7

Обобщающие таблицы

Таблица 1. Треугольники

	разносторонние	равнобедренные	равносторонние
Остроугольные			
Тупоугольные			—
Прямоугольные			—
Свойства равнобедренного треугольника		Свойства прямоугольного треугольника	
	1) $AB = BC$ 2) $\angle A = \angle C$ 3) BD – медиана, высота, биссектриса		1) $\angle A + \angle B = 90^\circ$ 2) если $\angle B = 30^\circ$, то $AC = AB : 2$. 3) если CD – медиана, то $CD = BD = AD$
Соотношения между сторонами и углами треугольника			
	1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 2) $\angle A < \angle B < \angle C \Rightarrow BC < AC < AB$ 3) $AB < AC + BC, AC < AB + BC, BC < AB + AC$ 4) $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$		
Медиана	Биссектриса	Высота	
AA_1 – медиана, если $BA_1 = CA_1$	AA_1 – биссектриса, если $\angle 1 = \angle 2$.	AA_1 – высота, если $AA_1 \perp BC$.	

Таблица 2

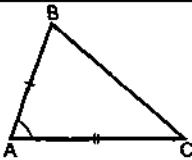
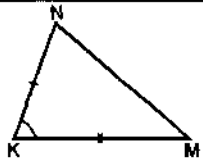
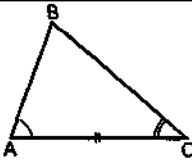
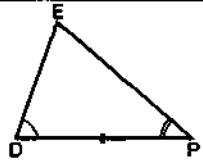
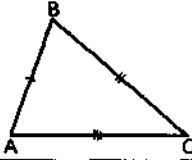
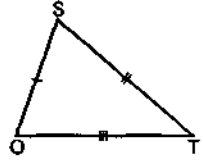
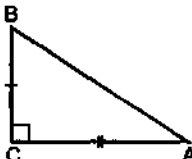
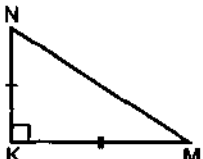
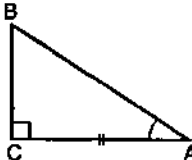
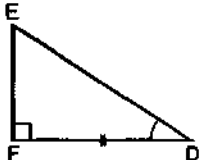
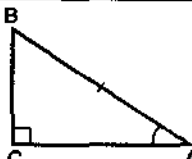
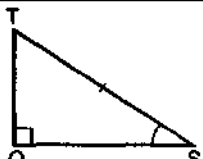
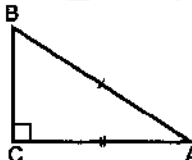
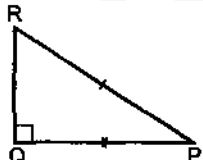
Признаки равенства треугольников	
По двум сторонам и углу между ними	 
По стороне и двум прилежащим к ней углам	 
По трем сторонам	 
Признаки равенства прямоугольных треугольников	
По двум катетам	 
По катету и прилежащему к нему острому углу	 
По гипотенузе и острому углу	 
По гипотенузе и катету	 

Таблица 3. Параллельные прямые и углы

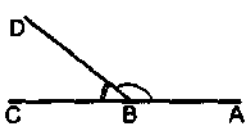
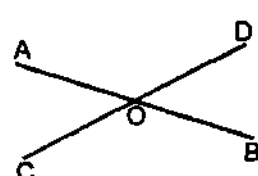
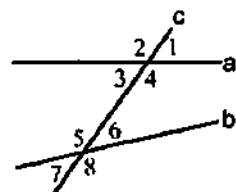
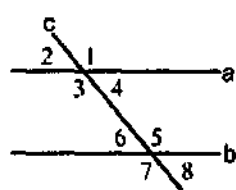
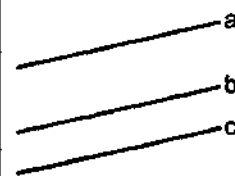
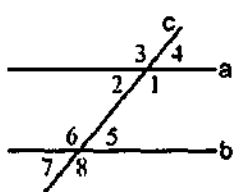
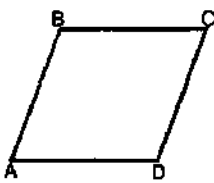
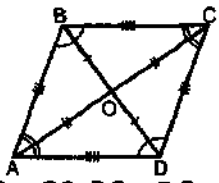
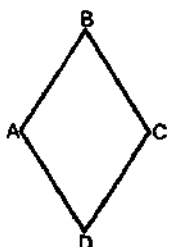
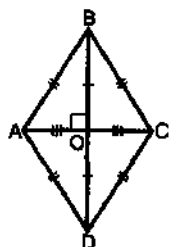
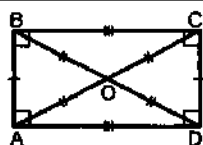
Углы, образованные при пересечении прямых		
		
$\angle ABD$ и $\angle DBC$ – смежные $\angle ABD + \angle DBC = 180^\circ$	$\angle AOC$ и $\angle BOD$ – вертикальные $\angle AOD$ и $\angle BOC$ – вертикальные $\angle AOC = \angle BOD$; $\angle AOD = \angle BOC$	$\angle 1$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$ – соответственные $\angle 2$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 3$ и $\angle 5$ – односторонние $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ – накрест лежащие
Свойства параллельных прямых		
	Если $a \parallel b$, то: 1) $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$ (соответственные углы равны) 2) $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$ (накрест лежащие углы равны) 3) $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ (сумма односторонних углов равна 180°)	
Признаки параллельности прямых		
		Если: 1) $\angle 1 = \angle 6$ ($\angle 2 = \angle 5$), то $a \parallel b$. 2) $\angle 4 = \angle 5$ ($\angle 3 = \angle 6$, $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 8$), то $a \parallel b$. 3) $\angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$ ($\angle 2 + \angle 6 = 180^\circ$), то $a \parallel b$.
Аксиома параллельности прямых		
Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.		

Таблица 4. Четырехугольники

Определение	Свойства	Признаки
Параллелограмм		
 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$	 1) $AO = CO$, $BO = DO$, $O = AC \cap BD$ 2) $AB = CD$, $BC = AD$ 3) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 4) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D =$ $= \angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180^\circ$	$ABCD$ – параллелограмм, если: 1) $AB = CD$, $AB \parallel CD$ или $BC = AD$, $BC \parallel AD$ 2) $AB = CD$ и $BC = AD$; 3) $AC \cap BD = O$, $AO = CO$, $BO = DO$.
Ромб		
 $ABCD$ – параллелограмм, $AB = BC =$ $= CD = DA$.	 1) $AC \perp BD$ 2) AC – биссектриса $\angle A$ и $\angle C$ BD – биссектриса $\angle B$ и $\angle D$. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.	$ABCD$ – ромб, если: 1) $ABCD$ – параллелограмм и $AC \perp BD$; 2) $ABCD$ – параллелограмм и AC и BD – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ и $\angle D$; 3) $AB = BC = CD = DA$.
Прямоугольник		
 $ABCD$ – параллелограмм, $\angle A = \angle B =$ $= \angle C = \angle D$.	 1) $AC = BD$ Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.	$ABCD$ – прямоугольник, если: 1) $ABCD$ – параллелограмм и $AC = BD$; 2) $ABCD$ – параллелограмм и $\angle A = 90^\circ$ ($\angle B$, $\angle C$, $\angle D$) 3) $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$

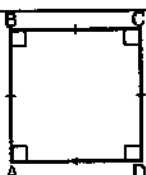
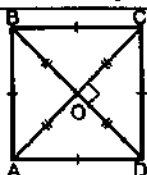
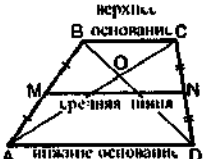
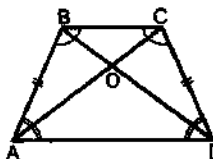
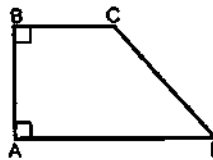
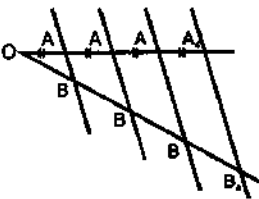
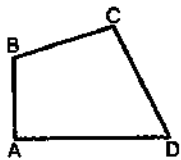
Определение	Свойства	Признаки
Квадрат		
 $ABCD$ – прямоугольник, $AB = BC = CD = DA$.	 Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника.	$ABCD$ – квадрат, если: 1) $ABCD$ – прямоугольник, $AC \perp BD$; 2) $ABCD$ – ромб, $AC = BD$; 3) $ABCD$ – ромб, $\angle A = 90^\circ$; 4) $ABCD$ – прямоугольник, AC и BD – биссектрисы его углов.
Трапеция		
 $BC \parallel AD$, $MN \parallel BC \parallel AD$	$MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$ $\triangle AOD \sim \triangle COB$  $ABCD$ – равнобокая трапеция. $AC = BD$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.  прямоугольная трапеция	Теорема Фалеса  Если $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.
Выпуклый четырехугольник		
	$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$	

Таблица 5. Площади фигур

Площадь треугольника

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B =$$

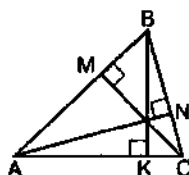
$$= \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin C$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + AC)$,

$S = rp$, где r – радиус вписанной окружности.

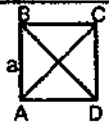
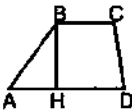
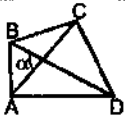
$S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности.



$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC,$ $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$		$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	
$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{DC}$		$\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} =$ $= \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$	
$S_{AOM} = S_{BOM} = S_{BON} = S_{CON} = S_{AOK} = S_{COK}$			

Площади четырехугольников

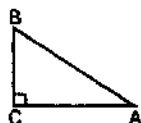
Параллелограмм		$S = AD \cdot BE = CD \cdot BF$ $S = AB \cdot AD \cdot \sin A =$ $= BA \cdot BC \cdot \sin B$
Прямоугольник		$S = AB \cdot BC$

Ромб		$S = 0,5 \cdot AC \cdot BD$ $S = AB^2 \cdot \sin A = AB^2 \cdot \sin B$ $S = AB \cdot AH$
Квадрат		$AC = d$ $S = a^2$ $S = 0,5d^2$
Трапеция		$S = 0,5 CH (BC + AD)$
Выпуклый четырехугольник		$S = 0,5 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$

Теорема Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Если $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $\triangle ABC$ – прямоугольный.

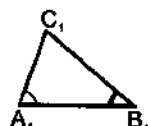
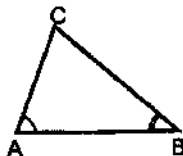
**Таблица 6. Подобные треугольники****Определение**

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ если } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

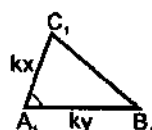
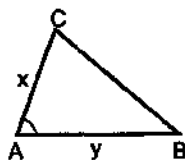
$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = k; \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = k^2.$$

Признаки подобия треугольников**I признак**

Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

**II признак**

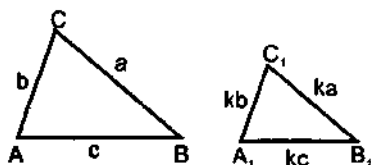
Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} (=k)$, $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



III признак

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} (=k)$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

**Применение подобия**

MN – средняя линия треугольника

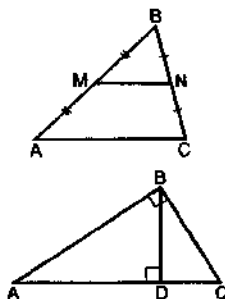
$MN \parallel AC$, $MN = 0,5 AC$

$$BD = \sqrt{AD \cdot DC}$$

$$AB = \sqrt{AD \cdot AC}$$

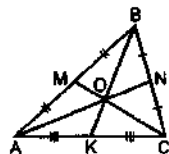
$$BC = \sqrt{CD \cdot AC}$$

$\triangle ABD \sim \triangle BCD \sim \triangle ACB$

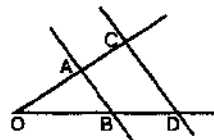


$$AN \cap BK \cap CN = O$$

$$\frac{AO}{NO} = \frac{BO}{KO} = \frac{CO}{MO} = \frac{2}{1}$$

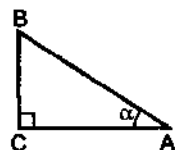


Если $AB \parallel CD$, то $\frac{AO}{OB} = \frac{AC}{BD}$

**Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника**

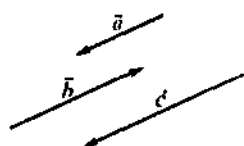
$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}; \quad \cos \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Таблица 7. Векторы. Метод координат

Вектор – направленный отрезок $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – коллинеарные $\vec{a}, \vec{c}$ – сонаправленные $\vec{a}, \vec{b}$ – противоположно направленные $\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Вычитание векторов $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$	Сложение векторов а) правило треугольника $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ б) правило параллелограмма $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ правило многоугольника $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ (x, y – коэффициенты разложения)	Умножение вектора на число $k > 0 \Rightarrow (k \cdot \vec{a}) \uparrow \vec{a}, k \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a}$ $k < 0 \Rightarrow (k \cdot \vec{a}) \updownarrow \vec{a}, k \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a}$

Метод координат

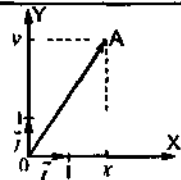
 $\vec{OA} \{x; y\};$ $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$	$\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{d}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$ $\vec{e} = k \cdot \vec{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{e}\{k \cdot x_1; k \cdot y_1\}$	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ $\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Если $M(x; y)$ – середина AB, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$
Уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где R – радиус окружности; $(x; y)$ – точка окружности; $(x_0; y_0)$ – центр окружности.	Уравнение прямой $ax + by + c = 0$	

Таблица 8. Многоугольники

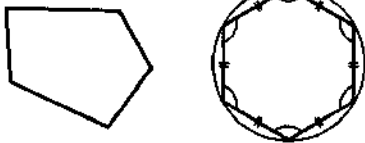
Многоугольники		Выпуклые многоугольники	
		Сумма углов равна $180^\circ \cdot (n-2)$ 	
выпуклые	невыпуклые	неправильные	правильные
Правильные многоугольники			
Внутренний угол $\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$; Внешний угол $\beta = \frac{360^\circ}{n}$			
$R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$; $r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$; $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$; $S = \frac{1}{2} P \cdot r$			

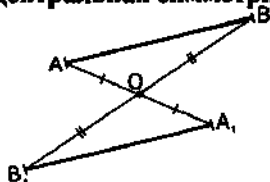
Таблица 9. Движения

Движение – отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками.

Свойства движений

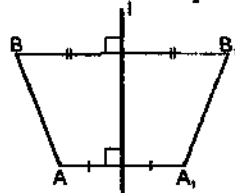
- 1) При движении отрезок отображается на отрезок
- 2) При движении треугольник отображается на равный ему треугольник
- 3) При движении прямая отображается на прямую, луч – на луч, а угол – на равный ему угол.

Центральная симметрия



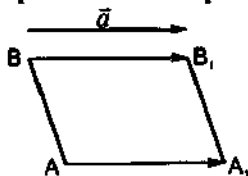
O – центр симметрии

Осевая симметрия



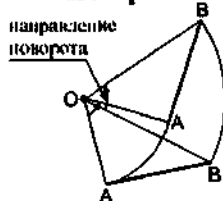
l – ось симметрии

Параллельный перенос



$\vec{a}$ – вектор параллельного переноса, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{a}$

Поворот



$$\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$$

α – угол поворота; O – центр поворота

СОДЕРЖАНИЕ

От автора.....	3
Почасовое планирование учебного материала.....	4
УРОКИ ВВОДНОГО ПОВТОРЕНИЯ	5
ВЕКТОРЫ.....	19
МЕТОД КООРДИНАТ	73
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА	135
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА	202
ДВИЖЕНИЕ.....	254
ПОВТОРЕНИЕ.....	283
Обобщающие таблицы	310

Учебно-методическое издание

В помощь школьному учителю

Гаврилова Нина Федоровна

**Поурочные разработки по геометрии
9 класс**

Налоговая льгота — ОКП 005-93-953 (Литература учебная)

Издательство «ВАКО»

Изд. лицензия ИД № 03063 от 18.10.2000

Подписано к печати с диапозитивов 15.09.2004

Формат 60×90/16 Печать офсетная

Гарнитура Таймс Усл.-печ. л. 20

Тираж 20 000 экз. Заказ № 4348

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов на ФГУП ордена «Знак Почета»

Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова

214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2